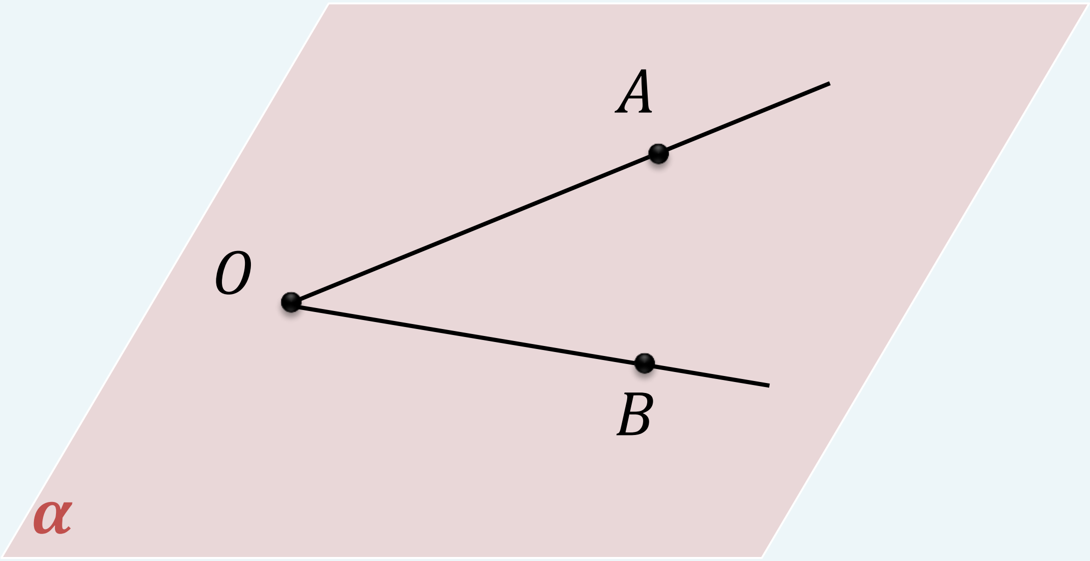
Угол между плоскостями

Карнаухова Л.Н.

Планиметрия

Угол – геометрическая фигура, образованная двумя лучами, исходящими из одной точки.

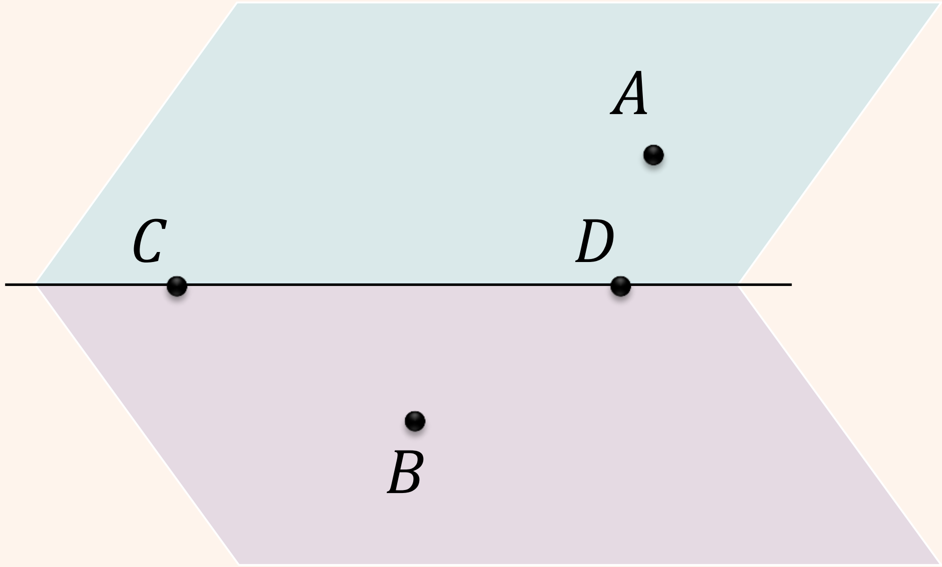
$\angle AOB$



Стереометрия

Двугранные углы

$ACDB$



Определение. ***Двугранным углом*** называется фигура, образованная прямой a и двумя полуплоскостями с общей границей a, не принадлежащими одной плоскости.

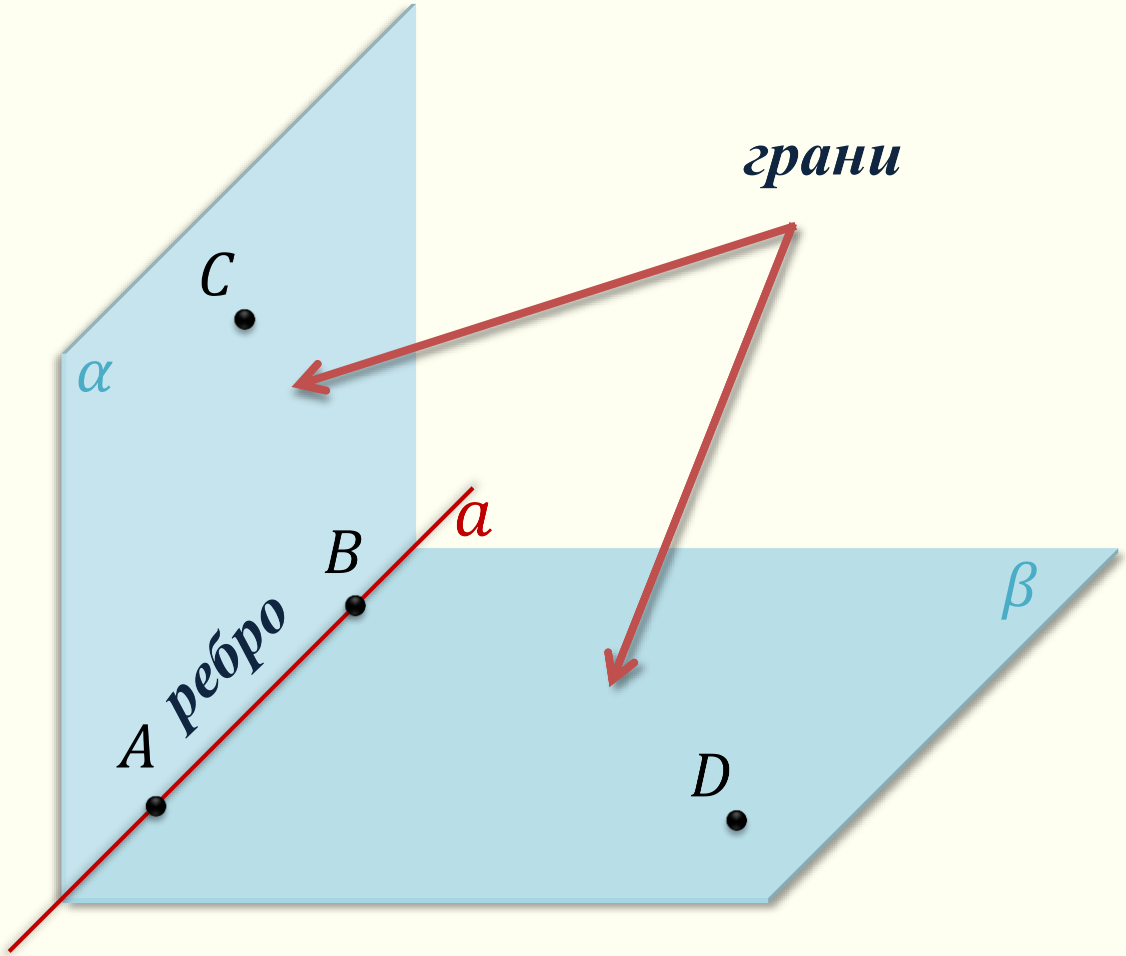
Полуплоскости, образующие двугранный угол, называются его *гранями*.

Прямая a называется *ребром* двугранного угла.

Двугранный угол, ребро которого есть прямая AB, а гранями являются полуплоскости α и β, обозначают так:

$$\boldsymbol{\alpha AB\beta}$$

Двугранный угол с ребром AB, на разных гранях которого отмечены точки C и D, то двугранный угол называют $\boldsymbol{CABD}$.



Для измерения двугранного угла вводится понятие ***линейного угла***.

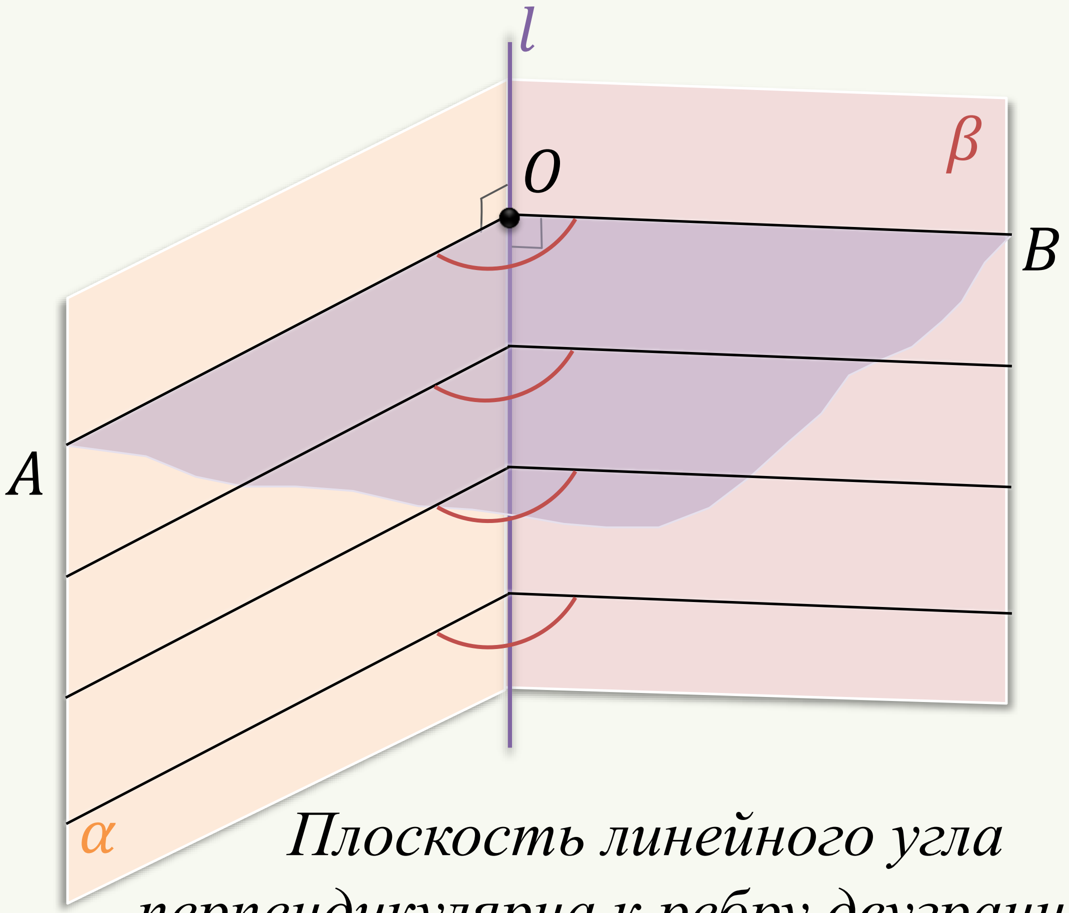
Пусть $O \in l$.

$OA \subset \alpha, OB \subset \beta$

$OA \perp l, OB \perp l$

$\angle \boldsymbol{AOB}$, сторонами которого служат лучи OA и OB, называется *линейным углом* данного двугранного угла.

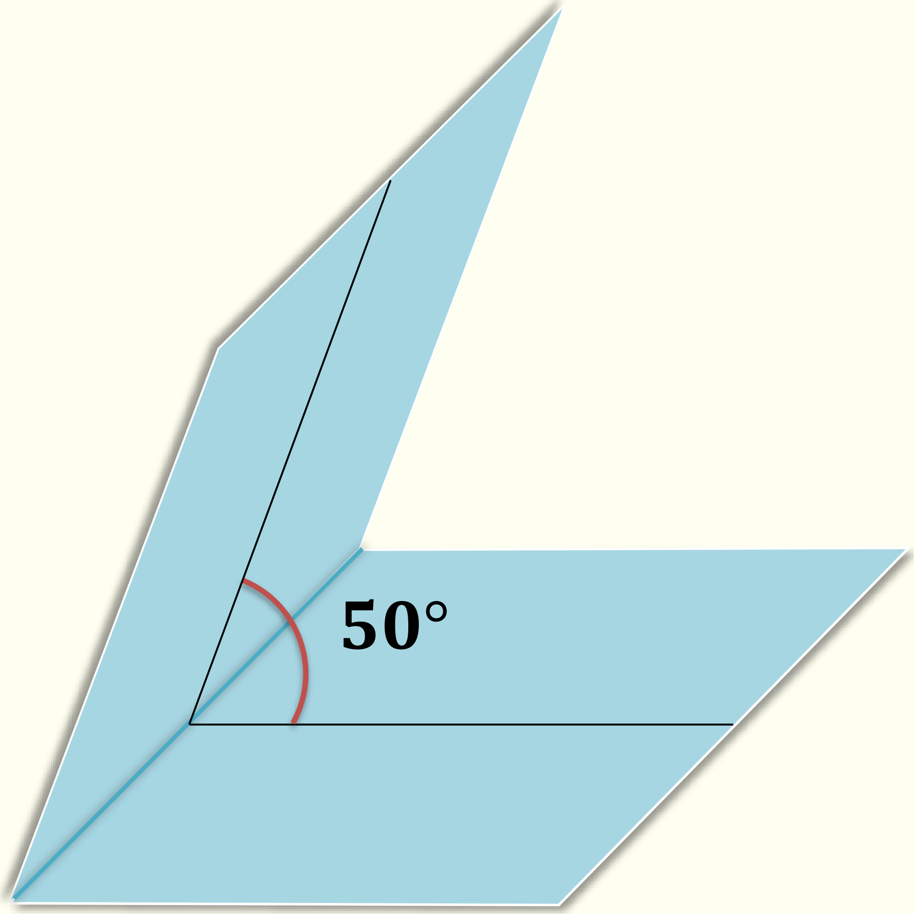
Определение. ***Линейным углом двугранного угла*** называется угол, сторонами которого являются лучи с общим началом на ребре двугранного угла, которые проведены в его гранях перпендикулярно ребру.



Плоскость линейного угла перпендикулярна к ребру двугранного угла.

Двугранный угол имеет бесконечное множество линейных углов.

Определение. ***Градусной мерой двугранного угла*** называется градусная мера его линейного угла.



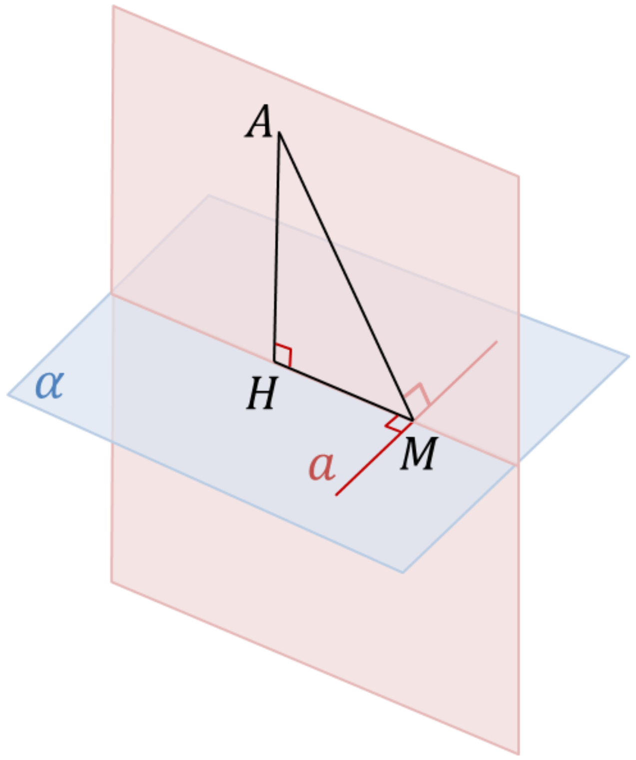
«Двугранный угол равен 50°»

Полезная теория

Теорема о трёх перпендикулярах

Теорема. Прямая, проведенная в плоскости через основание наклонной перпендикулярно к ее проекции на эту плоскость, перпендикулярна и к самой наклонной.

Обратная теорема. Прямая, проведенная в плоскости через основание наклонной перпендикулярно к ней, перпендикулярна и к ее проекции.



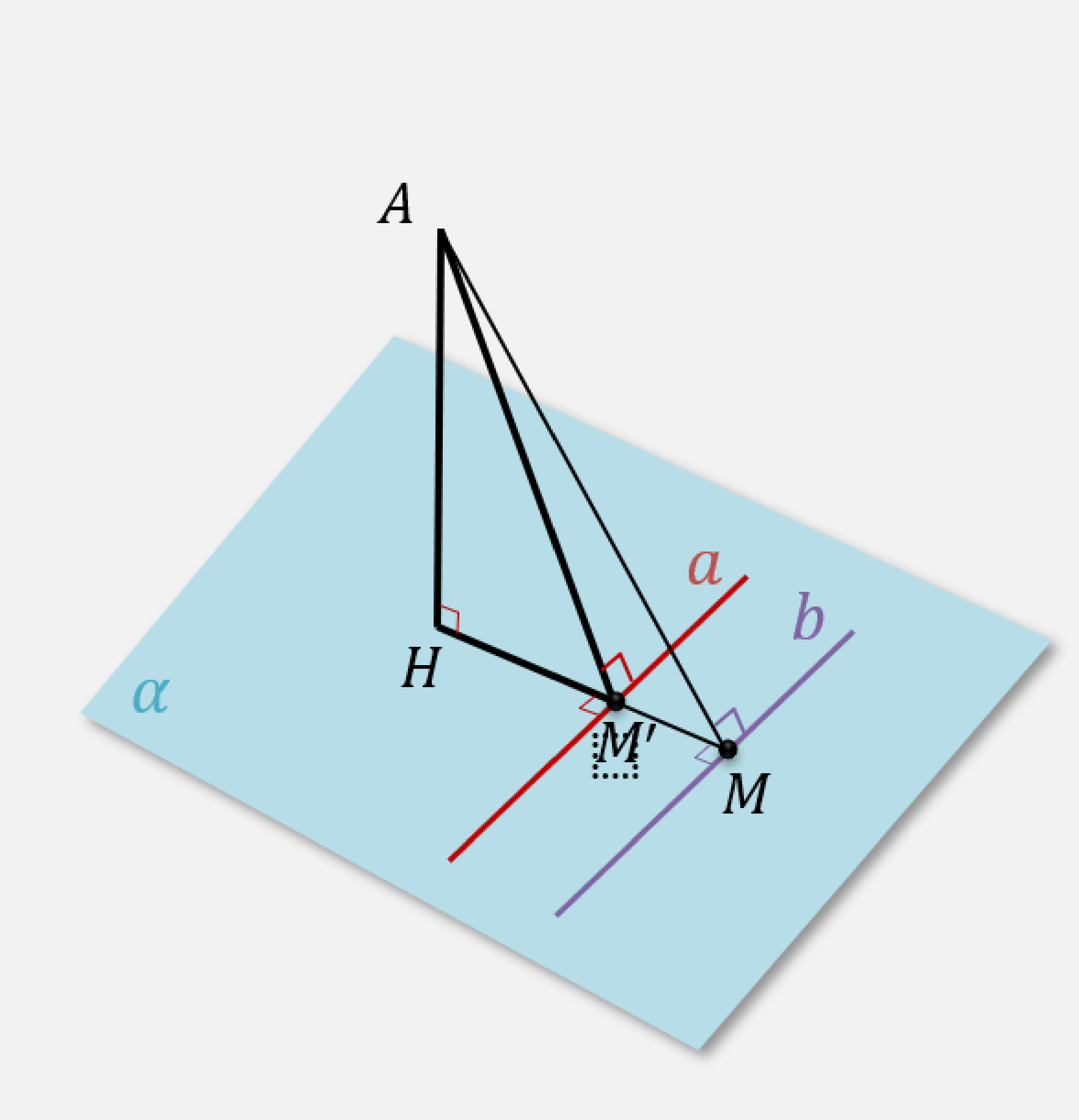
Замечание.

$$a \subset \alpha,\ M \in a$$

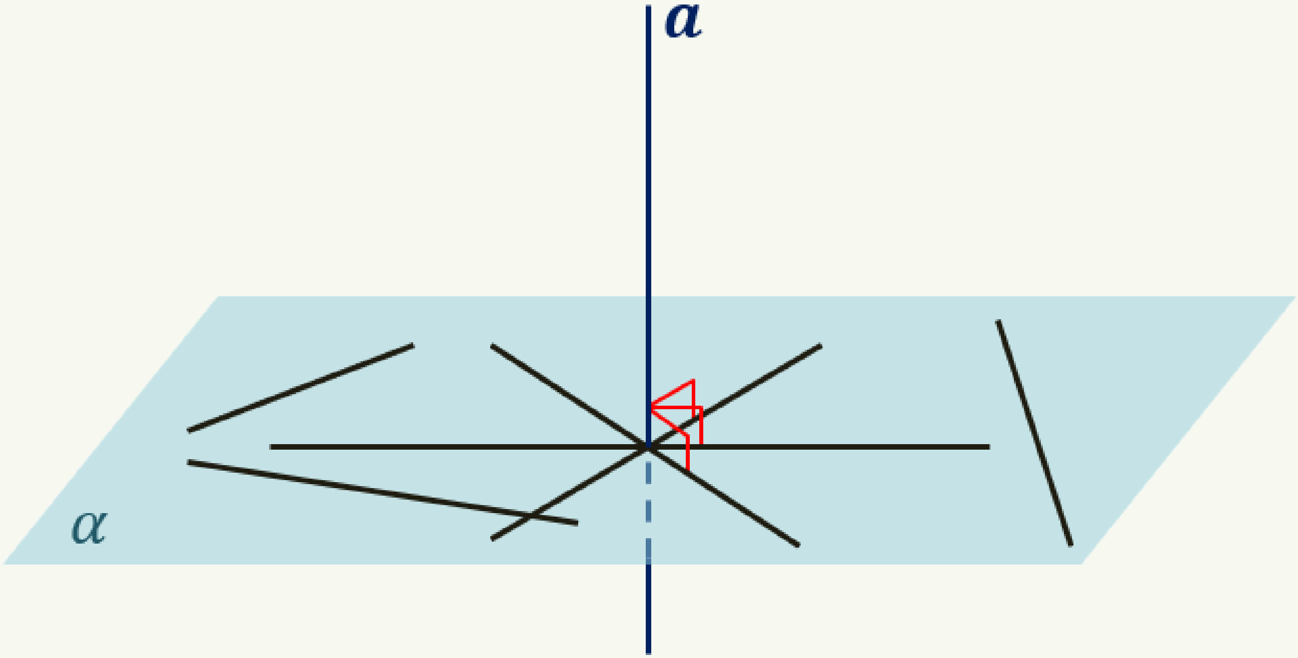
$$b \subset \alpha,\ b \parallel a$$

Углы между прямыми
b, AM, HM
не изменятся.

И из того, что $b \perp AM$
будет вытекать $b \perp HM$
и наоборот.

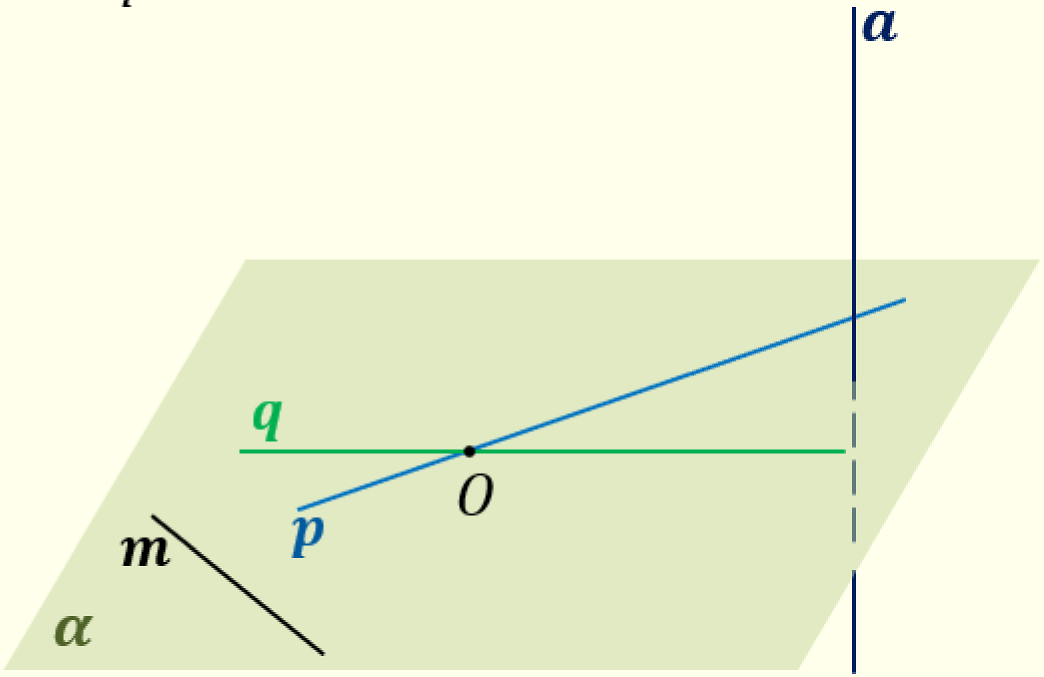


Прямая называется перпендикулярной к плоскости,
если она перпендикулярна к любой прямой, лежащей в этой плоскости.

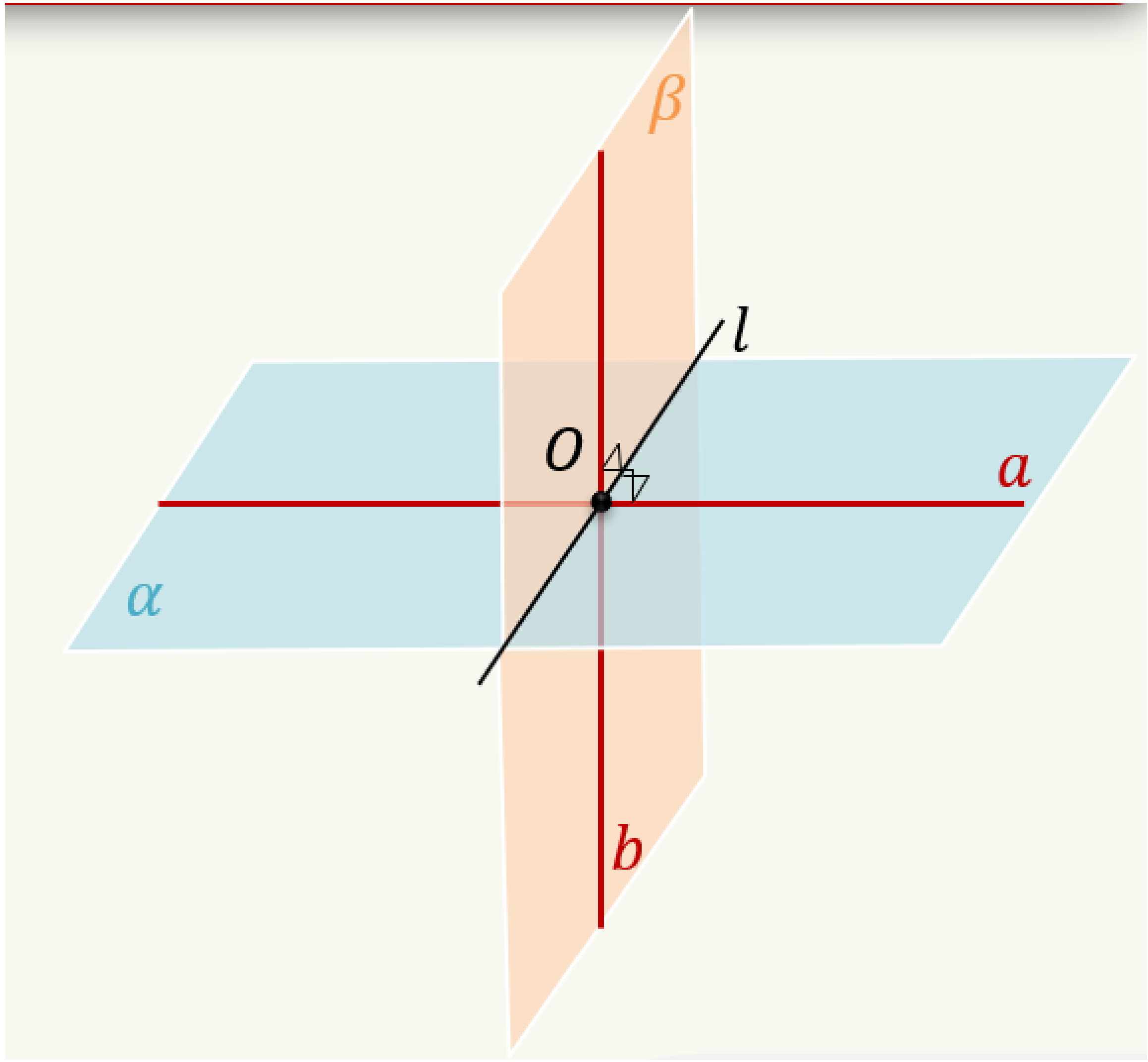


Теорема. **Если прямая перпендикулярна двум пересекающимся прямым, лежащим в плоскости, то она перпендикулярна к этой плоскости.**

$p \cap q = O;\ a \perp p,\ a \perp q$

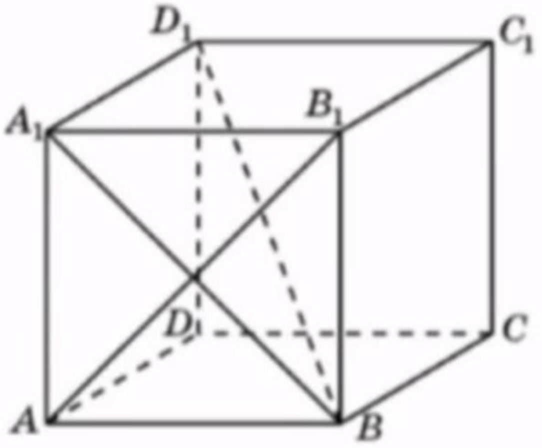


Теорема (Признак перпендикулярности двух плоскостей). Если одна из двух плоскостей проходит через прямую, перпендикулярную к другой плоскости, то такие плоскости перпендикулярны.



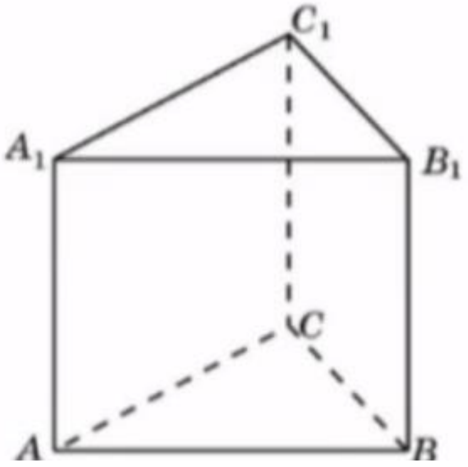
Подготовительные задачи

Докажите, что диагональ BD_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ перпендикулярна прямой AB_1.

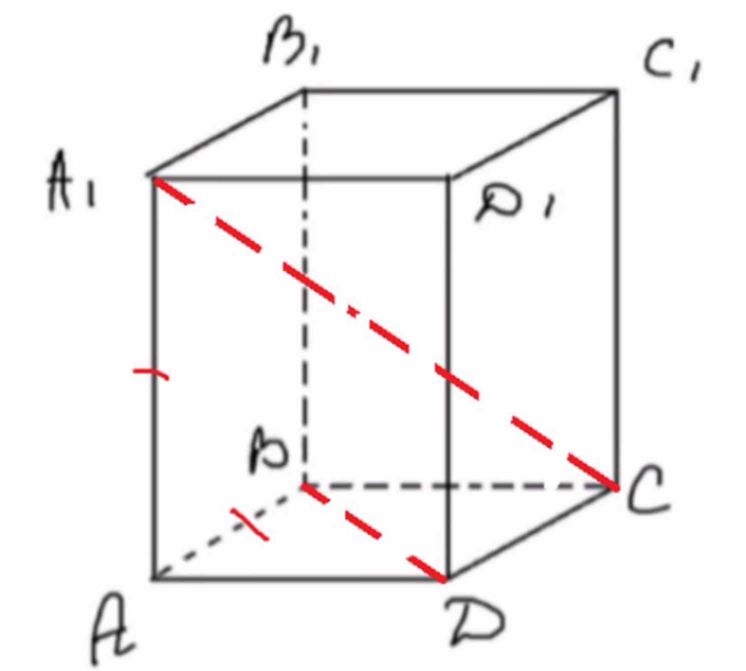


Подготовительные задачи

В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ укажите ортогональную проекцию отрезка AC_1 на плоскость: а) ABC; б) BCC_1.

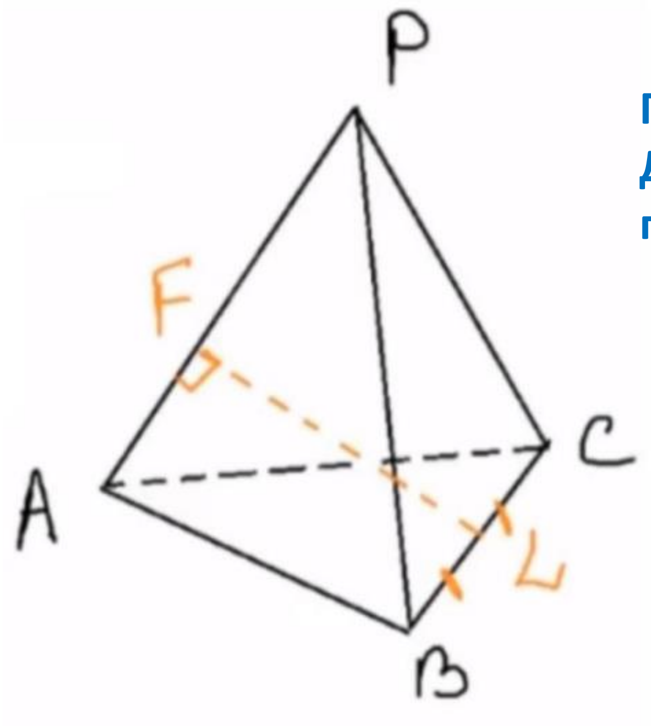


Подготовительные задачи



Основание - ромб

Докажите, что A_1C и BD перпендикулярны



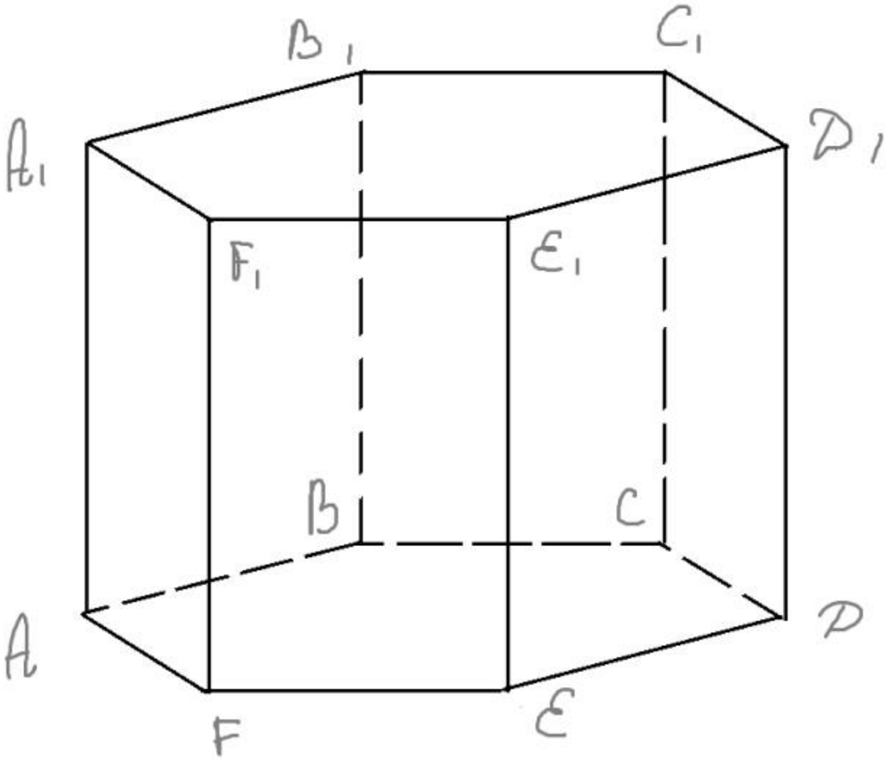
Правильный тетраэдр. Доказать, что PA перпендикулярна (BFC)

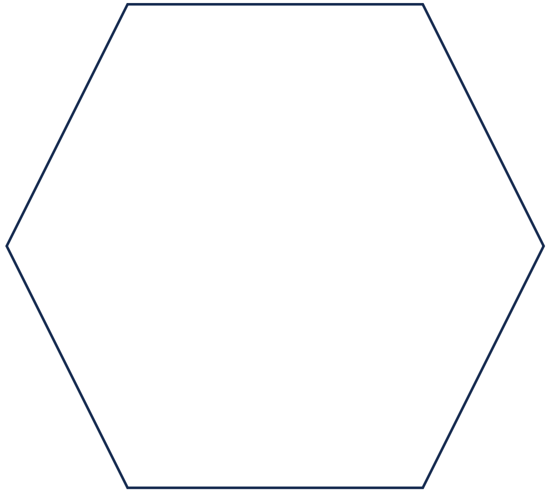
Задача 1.

Дана правильная шестиугольная призма $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ со стороной основания $\sqrt{3}$ и боковым ребром 1.

а) Докажите, что плоскости ACA_1 и B_1CE_1 перпендикулярны.

б) Найдите угол между плоскостями B_1CE_1 и ABC.



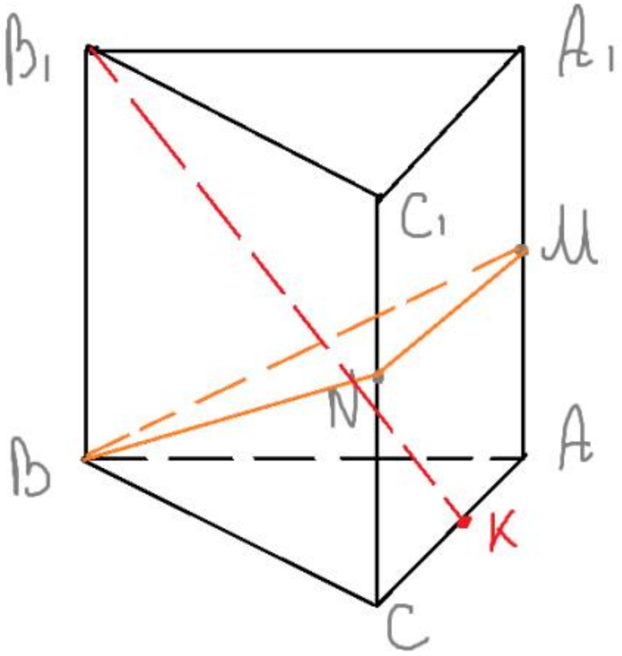


Задача 2.

Точки M и N — середины боковых рёбер соответственно AA_1 и CC_1 прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$.

а) Докажите, что отрезок, соединяющий вершину B_1 с серединой ребра AC, делится плоскостью BMN в отношении $2:1$, считая от точки B_1.

б) Найдите угол между плоскостями AA_1C_1 и MBN, если $AB = BC = 15$, $AC = 24$ и $AA_1 = 144$.

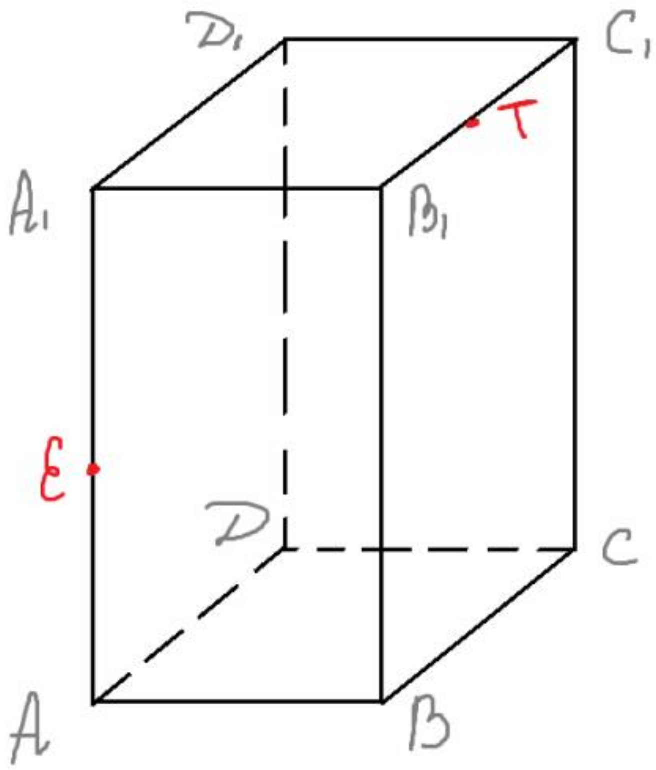


Задача 3.

На ребре AA_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ взята точка E так, что $A_1E : EA = 4 : 3$. Точка T — середина ребра B_1C_1. Известно, что $AB = 5$, $AD = 8$, $AA_1 = 14$.

а) Докажите, что плоскость ETD_1 делит ребро BB_1 в отношении $2 : 5$.

б) Найдите угол между плоскостью ETD_1 и плоскостью AA_1B_1.

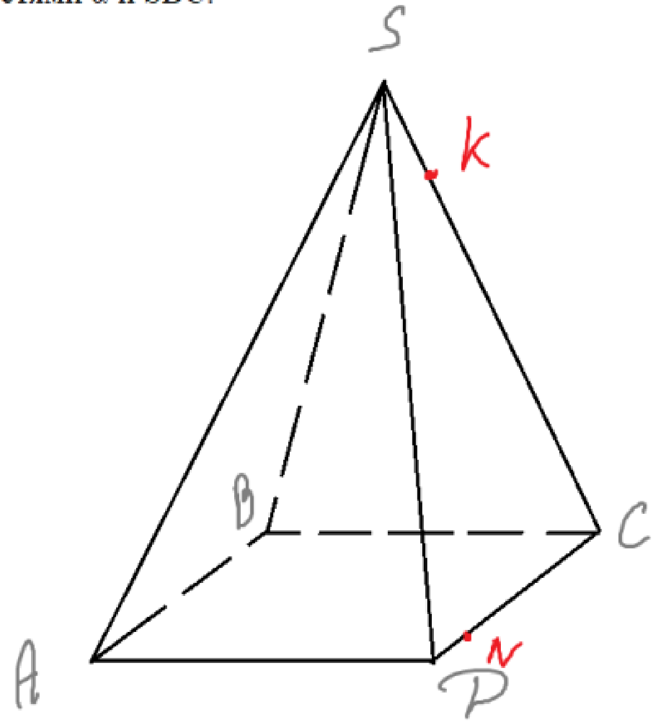


Задача 4.

В правильной четырёхугольной пирамиде SABCD сторона AB основания равна 4, а боковое ребро SA равно 7. На рёбрах CD и SC отмечены точки N и K соответственно, причём DN : NC = SK : KC = 1 : 3. Плоскость α содержит прямую KN и параллельна прямой BC.

а) Докажите, что плоскость α параллельна прямой SA.

б) Найдите угол между плоскостями α и SBC.



Задача 5.

В треугольной пирамиде $SABC$ с основанием ABC точка M — середина ребра SA, точка K — середина ребра SB, O — точка пересечения медиан основания.

а) Докажите, что плоскость CMK делит отрезок SO в отношении $3:2$, считая от вершины S.

б) Найдите угол между плоскостями CMK и ABC, если пирамида правильная, $SC = 6$, $AB = 4$.