# Задачи с экономическим содержанием. ЕГЭ по математике.

Карнаухова Лилия Николаевна
МАОУ гимназия № 1 г. Тюмени

# Задачи с экономическим содержанием в ЕГЭ по математике профильного уровня

1. Задачи на вклады и ценные бумаги
2. Задачи на равные(постоянные платежи)
3. Задачи на дифференцированные платежи
4. Задачи общего вида (вне классификации)
5. Задачи на оптимизацию

# Арифметические текстовые задачи на проценты

**Пример 1.** Найдите 20 % от 84 килограммов. Ответ дайте в килограммах.

Чтобы найти процент от данного числа, нужно данное число умножить на дробь, выражающую указанный процент.

**Решение.** 20 % данной величины — это двадцать сотых (т. е. две десятых) этой величины. Поэтому 20 % от 84 килограммов — это $0,2 \cdot 84 = 16,8$ кг.

**Ответ.** 16,8.

**Пример 2.** Одна таблетка лекарства весит 20 мг и содержит 9 % активного вещества. Ребёнку в возрасте до 6 месяцев врач прописывает 1,35 мг активного вещества на каждый килограмм веса в сутки. Сколько таблеток этого лекарства следует дать ребёнку в возрасте четырёх месяцев и весом 8 кг в течение суток?

**Решение.** Поскольку процент — это одна сотая часть числа, активного вещества в каждой таблетке содержится $20 \cdot 0,09 = 1,8$ мг. Ребёнку указанного в условии задачи возраста и весом 8 кг требуется $8 \cdot 1,35 = 10,8$ мг активного вещества в сутки. Искомое число таблеток будет равно $10,8 : 1,8 = 6$.

**Ответ.** 6.

# Арифметические текстовые задачи на проценты

**Пример 3.** В июле товар стоил 5000 рублей. В ноябре цену на товар снизили на 7%, а в декабре подняли на 8%. Сколько рублей стоил товар после повышения цены в декабре?

**Решение.** Стоимость товара в ноябре уменьшилась на 7 сотых, т. е. составила $0{,}93 \cdot 5000 = 4650$ рублей.

Полученная стоимость увеличилась в декабре на 8 сотых, т. е. составила

$1{,}08 \cdot 4650=5022$ рубля.

**Ответ. 5022.**

# **Проценты по вкладам и кредитам.**
# Базовые экономические модели

$$1\% = \frac{1}{100} = 0{,}01$$

20% от 400 $\quad 400 \cdot \frac{20}{100} = 400 \cdot \frac{2}{10} = 400 \cdot 0{,}2 = 80$

r% от S: $\quad \frac{r}{100} S = 0{,}01S$

Было: *S* рублей, денежная сумма увеличилась на *r%*

Стало: $S + 0{,}01rS = S(1 + 0{,}01r) = Sk$, где $k = 1 + 0{,}01r$

**Задача 1.** Клиент разместил вклад в банке на сумму 3000 рублей. Банк начислил 5% годовых к сумме вклада в конце года. Какая сумма окажется на сберегательном счете через год? Через 2 года? На сколько увеличилась сумма вклада через 2 года?

Пусть *S* – первоначальная сумма вклада,

$S_1$ - сумма вклада через год,

r% - процентная ставка.

Тогда получим: $S_1 = S(1 + 0{,}01r)$

$$S_1 = 3000(1 + 0{,}01 \cdot 5) = 3000 \cdot 1{,}05 = 3150$$

(через 1год)

$$S_2 = 3150 \cdot 1{,}05 = 3307{,}5$$

(через 2года)

Пусть $\Delta S$ - разница между первоначальной суммой вклада и суммой через 2 года.

$$\Delta S = S_2 - S = 3307{,}5 - 3000 = 307{,}5$$

**Задача 2.** По истечении двух лет первоначальная сумма вклада выросла на **304,5**. Процентная ставка – **3 %** годовых. Найдите первоначальную сумму вклада.

$\Delta S = 304{,}5$
$n = 2$
$r = 3\%$
$S - ?$

$$S_1 = S \cdot k \qquad k = 1 + \frac{r}{100}$$
$$S_2 = S \cdot k^2$$

$$\Delta S = S_2 - S \quad = Sk^2 - S$$

$$\Delta S = S(k^2 - 1) = S(k-1)(k+1)$$

$$S = \frac{\Delta S}{(k-1)(k+1)}$$

$$S = \frac{\Delta S}{(k-1)(k+1)} = \frac{304.5}{(1.03-1)(1.03+1)} = \frac{304.5}{0.03 \cdot 2.03} = \frac{10150}{2.03}$$

$$\Delta S = \frac{1015000}{203} = 5000$$

Ответ: 5000

**Задача 3.** Иван Петрович открыл счет в банке на сумму S тыс. рублей под 10% годовых. Через 1 год после начисления процентов он снял со счета 10 тыс. рублей. Через 2 года после открытия счета сумма оказалась равной 231 тыс. Определите, чему равно S.

S- сумма вклада

R=10%

$S_1$ – сумма через год

Частичное снятие через 1 год

10000 рублей

$S_2$ – сумма через 2 года

S=?

Через 1 год: $S_1 = Sk$

Частичное снятие: $Sk - 10000$

Через 2 года: $S_2 = (Sk - 10000)k$

$$(Sk - 10000)k = 231000$$

$$(1{,}1 \cdot S - 10000)1{,}1 = 231000$$
$$1{,}1 \cdot S - 10000 = 210000$$
$$1{,}1 \cdot S = 220000$$
$$S = 2200000 \div 11$$
$$S = 200000$$

# Кредиты

## Дифференцированные платежи

Пусть $S_0$ — сумма кредита. Для кредита с дифференцированными платежами процент и периодичность обязательных платежей фиксируются (например, ежегодные, ежеквартальные или помесячные платежи), а фиксированный процент начисляется на ещё не выплаченную к моменту очередного обязательного платежа часть кредита (долга). В этом случае каждый год (или каждый платёжный период) сумма выплат уменьшается, поскольку она состоит из фиксированной части $\frac{S_0}{n}$ (где $n$ — число платежей, равное числу платёжных периодов) и процентов, начисляемых на остаток долга по кредиту, величина которого каждый год (или каждый платёжный период) уменьшается на $\frac{S_0}{n}$. Таким образом, при схеме с дифференцированными платежами клиент возвращает банку до истечения каждого платёжного периода $\frac{1}{n}$ часть суммы кредита и проценты от ещё не выплаченной на начало этого платёжного периода части кредита.

# Дифференцированные платежи

В июле планируется взять кредит в банке на сумму 10 млн рублей на срок 5 лет. Условия его возврата таковы:
– каждый январь долг возрастает на 10% по сравнению с концом предыдущего года;
– с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;
– в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года (на практике такая схема называется «схемой с дифференцированными платежами»).
Сколько млн рублей составила общая сумма выплат после погашения кредита?

S=10млн.
N=5
R=10%
Найти сумму выплат P

Долг будет уменьшаться на одну и ту же величину 1/5S каждый год.

В июле планируется взять кредит в банке на сумму 10 млн рублей на срок 5 лет. Условия его возврата таковы:

– каждый январь долг возрастает на 10% по сравнению с концом предыдущего года;

– с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;

– в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года (на практике такая схема называется «схемой с дифференцированными платежами»).

Сколько млн рублей составила общая сумма выплат после погашения кредита?

S=10млн.

N=5

R=10%

Найти сумму выплат P

$P=P_1+P_2+P_3+P_4+P_5$

| | Долг | Выплата |
|---|---|---|
| Июль 0 года | S | |
| Январь 1 года | Sk | $p_1 = Sk - \frac{4}{5}S$ |
| Июль 1 года | $\frac{4}{5}S$ | |
| Январь 2 года | $\frac{4}{5}Sk$ | $p_2 = \frac{4}{5}Sk - \frac{3}{5}S$ |
| Июль 2 года | $\frac{3}{5}S$ | |
| Январь 3 года | $\frac{3}{5}Sk$ | $p_3 = \frac{3}{5}Sk - \frac{2}{5}S$ |
| Июль 3 года | $\frac{2}{5}S$ | |
| Январь 4 года | $\frac{2}{5}Sk$ | $p4 = \frac{2}{5}Sk - \frac{1}{5}S$ |
| Июль 4 года | $\frac{1}{5}S$ | |
| Январь 5 года | $\frac{1}{5}Sk$ | $p_5 = \frac{1}{5}Sk - 0$ |
| Июль 5 года | 0 | |

В июле планируется взять кредит в банке на сумму 10 млн рублей на срок 5 лет. Условия его возврата таковы:

– каждый январь долг возрастает на 10% по сравнению с концом предыдущего года;

– с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;

– в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года (на практике такая схема называется «схемой с дифференцированными платежами»).

Сколько млн рублей составила общая сумма выплат после погашения кредита?

$P = P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5$

$$P = Sk - \frac{4}{5}S \quad + \quad \frac{4}{5}Sk - \frac{3}{5}S \quad + \quad \frac{3}{5}Sk - \frac{2}{5}S \quad + \quad \frac{2}{5}Sk - \frac{1}{5}S \quad + \quad \frac{1}{5}Sk$$

$$P = Sk\left(1 + \frac{4}{5} + \frac{3}{5} + \frac{2}{5} + \frac{1}{5}\right) - S\left(\frac{4}{5} + \frac{3}{5} + \frac{2}{5} + \frac{1}{5}\right) \qquad S_n = \frac{a_1 + a_n}{2}n$$

$$P = S(3k - 2)$$

$$P = 10(3 \cdot 1{,}1 - 2) = 13\text{млн.}$$

# Аннуитетные платежи

Пусть $S_0$—сумма кредита (долга) и кредит берётся на n лет под r% годовых.

Эта же схема применима и в тех случаях, когда процент по кредиту указывается для платёжного периода, а не для полного года.

Для реальных кредитов с аннуитетными платежами условия начисления процентов оказываются следующими:

• до истечения очередного платёжного периода банк начисляет r% на оставшуюся сумму долга, т. е. увеличивает её на r%;

• после начисления процентов клиент вносит в банк (также до истечения соответствующего платёжного периода) некоторую сумму x—одну и ту же для каждого платежа; сумма долга при этом уменьшается, и на эту уменьшенную на x сумму начисляются проценты до истечения следующего платёжного периода, после чего клиент вносит в банк платёж в размере той же суммы x и т. п.

31 декабря 2015 года Сергей взял в банке 9 930 000 рублей на покупку новой квартиры в кредит под 10% годовых. Схема выплаты кредита следующая: 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 10%), затем Сергей переводит в банк определённую сумму ежегодного платежа. Какой должна быть сумма ежегодного платежа, чтобы Сергей выплатил долг тремя равными ежегодными платежами?

S=9 930 000
R=10%
K=1+0.01*10=1.1
X – ежегодная выплата
3 равных ежегодных выплаты
X ?

| | Долг | Выплата |
|---|---|---|
| 0 год декабрь | $S$ | |
| Через год | $Sk$ | x |
| Через 2 года | $(Sk-x)k$ | x |
| Через 3 года | $((Sk-x)k-x)k-x$ | x |

$$((Sk-x)k-x)k-x=0$$

$$Sk^3-k^2x-kx-x=0$$

$$Sk^3=x(k^2+k+1)$$

$$x=\frac{Sk^3}{k^2+k+1}$$

31 декабря 2015 года Сергей взял в банке 9 930 000 рублей на покупку новой квартиры в кредит под 10% годовых. Схема выплаты кредита следующая: 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 10%), затем Сергей переводит в банк определённую сумму ежегодного платежа. Какой должна быть сумма ежегодного платежа, чтобы Сергей выплатил долг тремя равными ежегодными платежами?

S=9 930 000
R=10%
K=1+0.01*10=1.1
X – ежегодная выплата
3 равных ежегодных выплаты
X ?

$$x = \frac{Sk^3}{k^2 + k + 1}$$

$$x = \frac{993 \cdot 10^4 \cdot 1.1^3}{1.1^2 + 1.1 + 1} = \frac{993 \cdot 10^4 \cdot 1.331}{3.31} = \frac{993 \cdot 10^6 \cdot 1.331}{331} = \frac{3 \cdot 10^3 \cdot 1331}{1} = 3993000$$

1 Алексей взял кредит в банке на срок 12 месяцев. По договору Алексей должен вернуть кредит ежемесячными платежами. В конце каждого месяца к оставшейся сумме долга добавляется $r$% этой суммы, и своим ежемесячным платежом Алексей погашает эти добавленные проценты и уменьшает сумму долга. Ежемесячные платежи подбираются так, чтобы долг уменьшался на одну и ту же величину каждый месяц (на практике такая схема называется «схемой с дифференцированными платежами»). Известно, что общая сумма, выплаченная Алексеем банку за весь срок кредитования, оказалась на 13% больше, чем сумма, взятая им в кредит. Найдите $r$.

4 (ЕГЭ, 2015) В июле планируется взять кредит в банке на сумму 16 млн рублей на некоторый срок (целое число лет). Условия его возврата таковы: – каждый январь долг возрастает на 25% по сравнению с концом предыдущего года; – с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга; – в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года. На сколько лет был взят кредит, если известно, что общая сумма выплат после его погашения равнялась 40 млн рублей?

31 декабря 2015 года Алексей взял в банке 2 320 500 рублей на открытые бизнеса в кредит под 10% годовых. Схема выплаты кредита следующая: 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долго (то есть увеличивает долг на 10%), затем Алексей переводит в банк *X рублей. Какой должна быть сумма X, чтобы Алексей выплатил долг четырьмя равными платежами?*

Оля хочет взять в кредит 300 000 рублей. Погашение кредита происходит раз в год равными суммами (кроме, может быть, последней) после начисления процентов. Ставка процента 10% годовых. На какое минимальное количество лет может Оля взять кредит, чтобы ежегодные выплаты были не более 90 000 рублей?

# Источники

ЕГЭ 2018. Математика. Задачи с экономическим содержанием. Задача 17 (профильный уровень) / Под ред. И. В. Ященко.—М.: МЦНМО, 2018.—208 с.

Спасибо за внимание!