Демоверсия ЕГЭ – 2023.
Математике профильного уровня.

ГОТОВИМСЯ

К

ЕГЭ

ВЫБОР БУДУЩЕГО!

Учитель математики
Тютина Лилия Шамилевна

Демоверсии, спецификации, кодификаторы

Структура варианта КИМ ЕГЭ

Экзаменационная работа состоит из двух частей и включает в себя 18 заданий, которые различаются по содержанию, сложности и количеству заданий:

- часть 1 содержит 11 заданий (задания 1–11) с кратким ответом в виде целого числа или конечной десятичной дроби;
- часть 2 содержит 7 заданий (задания 12–18) с развёрнутым ответом (полная запись решения с обоснованием выполненных действий).

Задания части 1 направлены на проверку освоения базовых умений и практических навыков применения математических знаний в повседневных ситуациях.

Посредством заданий части 2 осуществляется проверка освоения математики на профильном уровне, необходимом для применения математики в профессиональной деятельности и на творческом уровне.

Задания части 1 предназначены для определения математических компетентностей выпускников образовательных организаций, реализующих программы среднего (полного) общего образования на базовом уровне.

Задание с кратким ответом (1–11) считается выполненным, если в бланке ответов № 1 зафиксирован верный ответ в виде целого числа или конечной десятичной дроби.

Задания 12–18 с развёрнутым ответом, в числе которых 5 заданий повышенного уровня и 2 задания высокого уровня сложности, предназначены для более точной дифференциации абитуриентов вузов.

При выполнении заданий с развернутым ответом части 2 экзаменационной работы в бланке ответов № 2 должны быть записаны полное обоснованное решение и ответ для каждой задачи.

Максимальный первичный балл за выполнение экзаменационной работы – 31.

На основе результатов выполнения всех заданий работы определяются первичные баллы, которые затем переводятся в тестовые по 100-балльной шкале.

Сохранена успешно зарекомендовавшая себя система оценивания выполнения заданий с развёрнутым ответом. Эта система, продолжившая традиции выпускных и вступительных экзаменов по математике, основывается на следующих принципах.

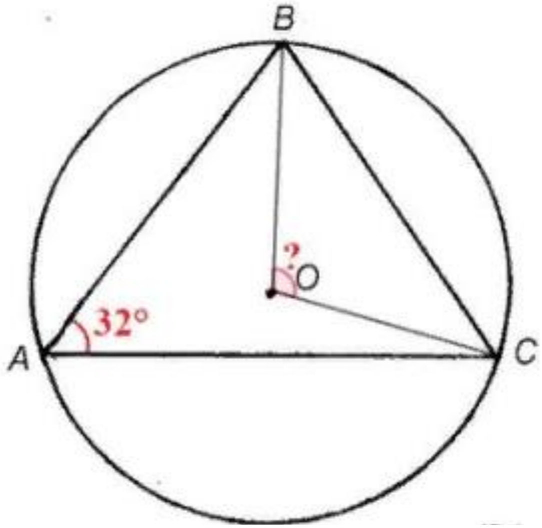
1. Возможны различные способы и записи развёрнутого решения. Главное требование – решение должно быть математически грамотным, из него должен быть понятен ход рассуждений автора работы. В остальном (метод, форма записи) решение может быть произвольным. Полнота и обоснованность рассуждений оцениваются независимо от выбранного метода решения. При этом оценивается продвижение выпускника в решении задачи, а не недочёты по сравнению с «эталонным» решением.

2. При решении задачи можно использовать без доказательств и ссылок математические факты, содержащиеся в учебниках и учебных пособиях, рекомендуемых к использованию при реализации имеющих государственную аккредитацию образовательных программ среднего общего образования.

В демонстрационном варианте представлены конкретные примеры заданий, не исчерпывающие всего многообразия возможных формулировок заданий на каждой позиции варианта экзаменационной работы.

Задание 1. Планиметрия.

Треугольник ABC вписан в окружность с центром O. Угол BAC равен 32°. Найдите угол BOC. Ответ дайте в градусах.



Вписанный угол равен **половине дуги**, на которую он опирается, а **центральный угол** равен **дуге**, на которую он опирается.

Поэтому центральный угол ***BOC*** **в два раза больше** вписанного угла **BAC**:

$$\angle BOC = 2 \cdot \angle BAC = 2 \cdot 32 = 64°$$

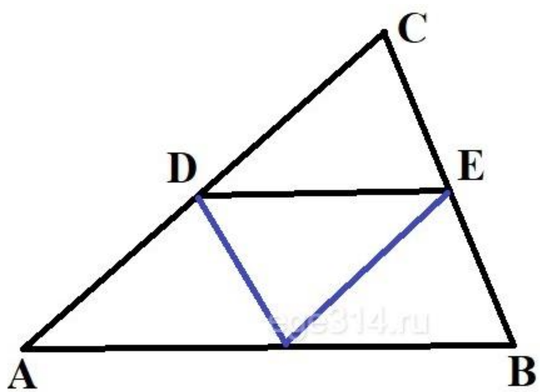
Ответ: 64.

ИЛИ

Задание 1. Планиметрия.

Площадь треугольника ABC равна 24; DE – средняя линия, параллельная стороне AB. Найдите площадь треугольника CDE.

Разделим треугольник ABC **на треугольники** равные треугольнику **CDE**, **проведя** ещё **две средних линии** ΔABC:



Получили **4** таких **треугольника**. Тогда:

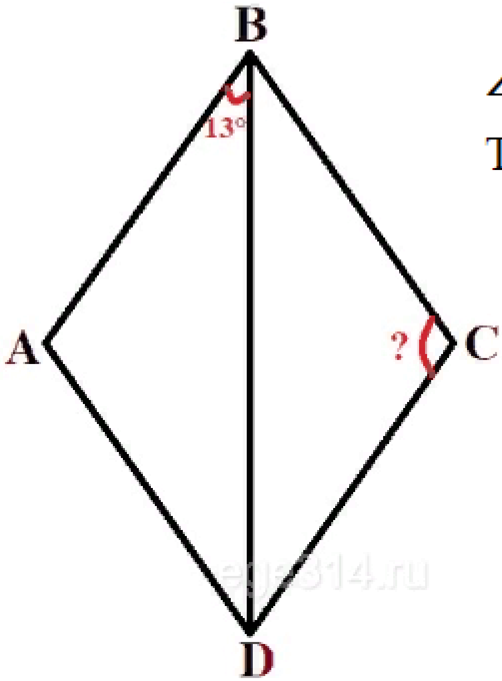
$$\mathbf{S_{CDE}} = S_{ABC}/4 = 24/4 = \mathbf{6}$$

Ответ: 6.

ИЛИ

Задание 1. Планиметрия.

В ромбе ABCD угол DBA равен 13°. Найдите угол BCD. Ответ дайте в градусах.



$\angle$**A = $\angle$C** – как противоположные углы ромба.

Треугольник **DAB равнобедренный**, значит $\angle$BDA = **$\angle$ABD = 13°**.

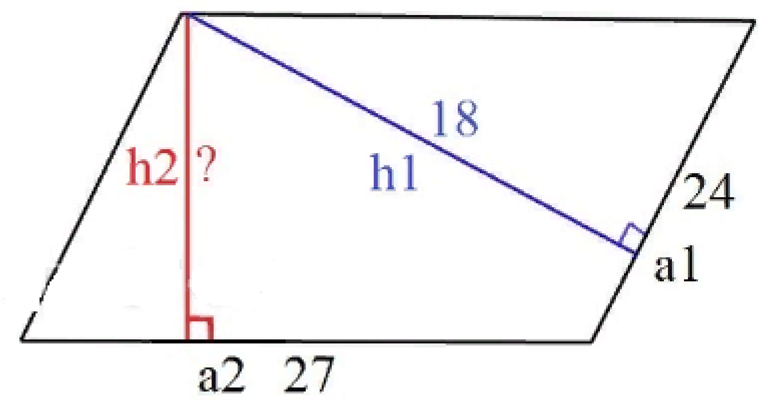
$\angle$A = **$\angle$BCD =** 180 – 2·13 = **154°**

Ответ: 154.

ИЛИ

Задание 1. Планиметрия.

Стороны параллелограмма равны 24 и 27. Высота, опущенная на меньшую из этих сторон, равна 18. Найдите высоту, опущенную на бо́льшую сторону параллелограмма.



Площадь параллелограмма можно найти **двумя способами**, через каждую из высот: $\mathbf{S = a_1 \cdot h_1} = 24 \cdot 18 = \mathbf{432}$

Найдём h_2:

$$\mathbf{S = a_2 \cdot h_2}$$

$$432 = 27 \cdot h_2$$

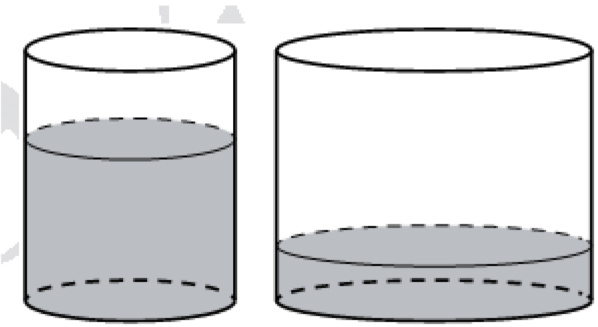
$$\mathbf{h_2} = 432/27 = \mathbf{16}$$

Ответ: 16.

Задание 2. Стереометрия.

В первом цилиндрическом сосуде уровень жидкости достигает 16 см. Эту жидкость перелили во второй цилиндрический сосуд, диаметр основания которого в 2 раза больше диаметра основания первого. На какой высоте будет находиться уровень жидкости во втором сосуде?

Ответ дайте в сантиметрах.



	h	d	V
1й цилин.	16 см	$d = 2r$	V_1
			$\parallel$
2й цилин.	? см.	$2d = 4r$	V_2

$$V_{цил} = \pi r^2 h$$

$$V_1 = V_2$$

$$\pi(2r)^2 \cdot 16 = \pi(4r)^2 \cdot h$$

$$\pi 4r^2 \cdot 16 = \pi 16 r^2 \cdot h \quad | : \pi \cdot 16 \cdot r^2$$

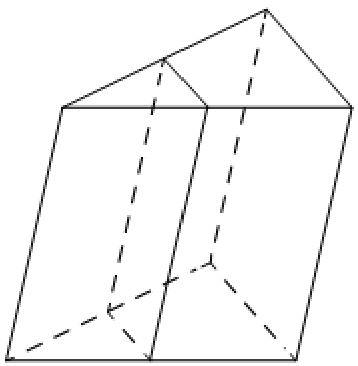
$$4 = h$$

Ответ: 4.

ИЛИ

Задание 2. Стереометрия.

Площадь боковой поверхности треугольной призмы равна 24. Через среднюю линию основания призмы проведена плоскость, параллельная боковому ребру. Найдите площадь боковой поверхности отсечённой треугольной призмы.



Площадь боковых граней (*прямоугольники*) **отсеченной призмы вдвое меньше** (*средняя линия делит пополам*) соответствующих **площадей боковых граней исходной** призмы.

Значит и **площадь боковой поверхности отсечённой призмы в 2 раза меньше**.

$$\mathbf{S_{отс} =} S_{исх}/2 = 24/2 = \mathbf{12}$$

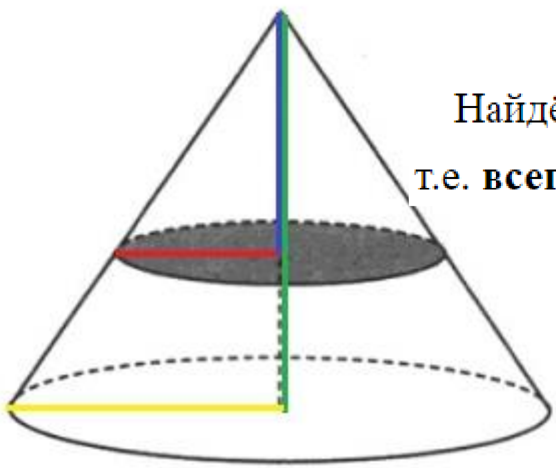
Ответ: 12.

ИЛИ

Задание 2. **Стереометрия.**

Через точку, лежащую на высоте прямого кругового конуса и делящую её в отношении 1:2, считая от вершины конуса, проведена плоскость, параллельная его основанию делящая конус на две части. Каков объём той части конуса, которая примыкает к его основанию, если объём всего конуса равен 54?

$$V_{\text{кон}} = \frac{1}{3}\pi r^2 h = 54$$



Найдём сначала **объём отсечённого конуса**. Конус поделен в отношении **1:2**, т.е. **всего 3 части** (2+1), тогда:

	h	r
Исходный конус (V)	h	r
Отсечённый конус ($V_{\text{отс}}$)	$\frac{1}{3}h$	$\frac{1}{3}r$

$$V_{\text{отс}} = \frac{1}{3}\cdot\pi\cdot\left(\frac{1}{3}r\right)^2\cdot\frac{1}{3}h = \frac{1}{27}\cdot\frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{27}\cdot V_{\text{кон}} = \frac{1}{27}\cdot 54 = 2$$

Тогда **объём той части исходного конуса**, которая **примыкает к его основанию** равна: $V_{\text{осн}} = V - V_{\text{отс}} = 54 - 2 = 52$

Ответ: 52.

Задание 3. Начала теории вероятностей.

В сборнике билетов по биологии всего 25 билетов. Только в двух билетах встречается вопрос о грибах. На экзамене выпускнику достаётся один случайно выбранный билет из этого сборника. Найдите вероятность того, что в этом билете будет вопрос о грибах.

Вероятность (P) находится по формуле:

$$P = \frac{m}{n}, \text{ где}$$

m – благоприятные исходы, это **билеты с вопросом о грибах ⇒ m = 2**;
n – все исходы, это **все билеты ⇒ n = 25**;

$$P = \frac{2}{25} = 0,08$$

Ответ: 0,08.

ИЛИ

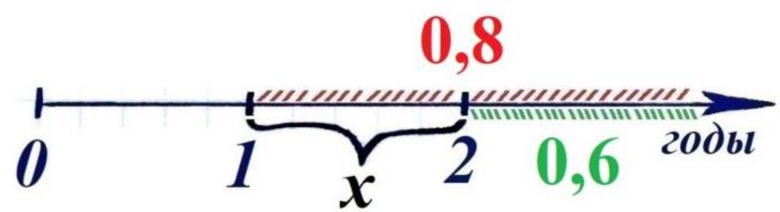
Задание 3. Начала теории вероятностей.

Вероятность того, что мотор холодильника прослужит более 1 года, равна 0,8, а вероятность того, что он прослужит более 2 лет, равна 0,6. Какова вероятность того, что мотор прослужит более 1 года, но не более 2 лет?

Нарисуем **координатную прямую**, отметив на ней **годы службы** мотора холодильника с соответствующими **вероятностями**:

Прослужит > **1** года = **0,8**

Прослужит > **2** лет = **0,6**



Вероятность, что он прослужит **более 1 года, но не более 2 лет,** обозначим за ***x***.

Из рисунка видим:

$$\mathbf{x + 0{,}6 = 0{,}8}$$

$$x = 0{,}8 - 0{,}6 = \mathbf{0{,}2}$$

Ответ: 0,2.

Задание 4. Вероятности сложных событий

Симметричную игральную кость бросили 3 раза. Известно, что в сумме выпало 6 очков. Какова вероятность события «хотя бы раз выпало 3 очка»?

При броске игральной кости могут выпасть числа от 1 до **6**.

Запишем **все возможные варианты**, когда кость бросают **три раза** и в **сумме** выпало **6 очков**:

$\mathbf{1} + \mathbf{1} + \mathbf{4} = 6$

$\mathbf{1} + \mathbf{4} + \mathbf{1} = 6$

$\mathbf{4} + \mathbf{1} + \mathbf{1} = 6$

$\mathbf{2} + \mathbf{2} + \mathbf{2} = 6$

$\mathbf{1} + \mathbf{2} + \mathbf{3} = 6$

$\mathbf{1} + \mathbf{3} + \mathbf{2} = 6$

$\mathbf{2} + \mathbf{3} + \mathbf{1} = 6$

$\mathbf{2} + \mathbf{1} + \mathbf{3} = 6$

$\mathbf{3} + \mathbf{1} + \mathbf{2} = 6$

$\mathbf{3} + \mathbf{2} + \mathbf{1} = 6$

Всего вариантов получили **10**, из них **хотя бы раз** выпало **три очка** в **6 вариантах**.

Найдём **вероятность** события «хотя бы раз выпало три очка»:

$$\frac{6}{10} = 0,6$$

Ответ: 0,6.

ИЛИ **Задание 4. Вероятности сложных событий**

В городе 48% взрослого населения – мужчины. Пенсионеры составляют 12,6% взрослого населения, причём доля пенсионеров среди женщин равна 15%. Для социологического опроса выбран случайным образом мужчина, проживающий в этом городе. Найдите вероятность события «выбранный мужчина является пенсионером».

Всего в городе **48% населения мужчины**. Тогда **женщины** составляют:

$$100 - 48 = \mathbf{52\%}\ \textbf{населения}$$

Пенсионеров среди женщин 15%, тогда от общего количества населения **женщины пенсионеры** составляют:

$$52 \cdot 0{,}15 = \mathbf{7{,}8\%}\ \textbf{населения}$$

Всего пенсионеров 12,6% населения, тогда **мужчин** среди них:

$$12{,}6 - 7{,}8 = \mathbf{4{,}8\%}\ \textbf{населения}$$

Найдём **вероятность** события **«выбранный мужчина является пенсионером»**:

$$\frac{4{,}8}{48} = 0{,}1$$

Ответ: 0,1.

Задание 5. Простейшие уравнения.

Найдите корень уравнения $3^{x-5} = 81$

$$3^{x-5} = 81$$

$$3^{x-5} = 3^4$$

$$x - 5 = 4$$

$$\mathbf{x = 4 + 5 = 9}$$

Ответ: 9.

ИЛИ

Найдите корень уравнения $\sqrt{3x + 49} = 10.$

$$\sqrt{3x + 49} = 10 \,\Big|^2$$

$$3x + 49 = 100$$

$$3x = 100 - 49$$

Ответ: 17.

$\mathbf{x = 17}$

Делаем **проверку**:

$$\sqrt{3 \cdot 17 + 49} = 10$$

$$\sqrt{51 + 49} = 10$$

$$\sqrt{100} = 10$$

$$10 = 10$$

верно

Ответ: 17.

ИЛИ Найдите корень уравнения $\log_8(5x + 47) = 3$

ОДЗ:

$5x + 47 > 0$

$\boldsymbol{x > -9{,}4}$

$$\log_8(5x + 47) = 3$$
$$8^3 = 5x + 47$$
$$512 = 5x + 47$$
$$-5x = 47 - 512$$
$$5x = 465$$

$\boldsymbol{x = 93} \in$ ОДЗ: $x > -9{,}4$

Ответ: 93.

ИЛИ

Решите уравнение $\sqrt{2x+3} = x$. Если корней окажется несколько, то в ответ запишите наименьший из них.

ОДЗ: $\boldsymbol{x \geq 0}$ *т.к после извлечения из под корня может получится только положительное число или 0.*

Возведём **обе части** уравнения **в квадрат**:

$$(\sqrt{2x+3})^2 = x^2$$
$$2x + 3 = x^2$$
$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

$\mathbf{D} = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3) = 4 + 12 = \mathbf{16 = 4^2}$

$x_1 = \frac{2-4}{2 \cdot 1} = -1 \notin$ ОДЗ

не является корнем уравнения

$x_2 = \frac{2+4}{2 \cdot 1} = 3$

Ответ: 3.

Задание 6. Вычисления и преобразования.

Найдите $\sin 2\alpha$, если $\cos\alpha = 0{,}6$ и $\pi < \alpha < 2\pi$.

Используя справочный материал ЕГЭ, найдём значение **sinα**:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$
$$\sin^2\alpha + 0{,}6^2 = 1$$
$$\sin^2\alpha = 1 - 0{,}36$$
$$\sin^2\alpha = 0{,}64$$
$$\mathbf{\sin\alpha = \pm 0{,}8}$$

Т.к. **π < a < 2π** это III и IV четверти, значения синуса там **отрицательные**, то **sinα = –0,8**.

Используя справочный материал ЕГЭ, разложим **sin2α**:

$$\mathbf{\sin 2\alpha} = 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha = 2\cdot(-0{,}8)\cdot 0{,}6 = \mathbf{-0{,}96}$$

Ответ: –0,96.

ИЛИ

Найдите значение выражения $16 \cdot log_7\sqrt[4]{7}$.

$$16 \cdot log_7\sqrt[4]{7} = 16 \cdot log_7 7^{\frac{1}{4}} = \frac{1}{4} \cdot 16 \cdot log_7 7 = 4 \cdot 1 = 4$$

Ответ: 4.

ИЛИ

Найдите значение выражения $4^{\frac{1}{5}} \cdot 16^{\frac{9}{10}}$.

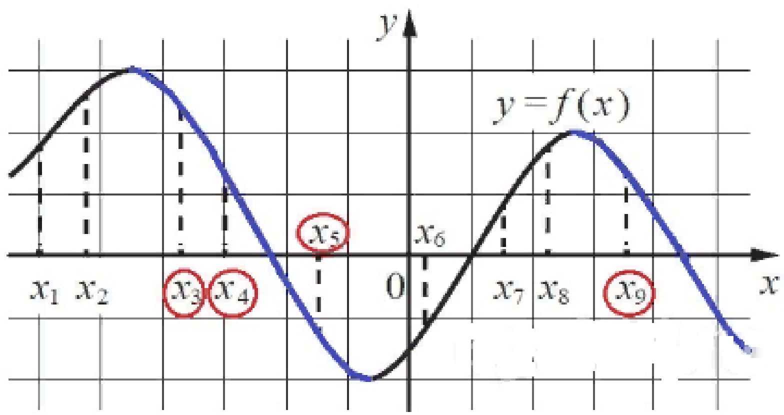
$$4^{\frac{1}{5}} \cdot 16^{\frac{9}{10}} = 4^{\frac{1}{5}} \cdot (4^2)^{\frac{9}{10}} = 4^{\frac{1}{5}} \cdot 4^{2\cdot\frac{9}{10}} =$$

$$4^{\frac{1}{5}} \cdot 4^{\frac{9}{5}} = 4^{\frac{1}{5}+\frac{9}{5}} = 4^{\frac{10}{5}} = 4^2 = 16$$

Ответ: 16.

Задание 7. Вычисления и преобразования.

На рисунке изображён график дифференцируемой функции $y = f(x)$. На оси абсцисс отмечены девять точек: $x_1, x_2, \ldots x_9$.



Найдите все отмеченные точки, в которых производная функции $f(x)$ отрицательна. В ответе укажите количество этих точек.

Производная функции **отрицательна** на **промежутках убывания функции** (выделены синим цветом).

На данных промежутках **4 точки**.

Ответ: 4.

ИЛИ

Задание 7. Вычисления и преобразования.

На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.

Можем найти значение **тангенса угла α:**

$$tg\angle\alpha = \frac{7}{4} = 1,75$$

–α = –1,75

Искомый угол является **смежным с ∠α**, его **значение** тангенса **противоположно**:

Значение производной в точке x_0 равно **тангенсу угла** между касательной и осью Ox.

Тангенс угла – это **отношение противолежащего** катета **к прилежащему катету** прямоугольного треугольника.

Ответ: –1,75.

Задание 8. Задачи с прикладным содержанием

Локатор батискафа, равномерно погружающегося вертикально вниз, испускает ультразвуковой сигнал частотой 749 МГц. Приёмник регистрирует частоту сигнала, отражённого от дна океана. Скорость погружения батискафа (в м/с) и частоты связаны соотношением

$$v = c \cdot \frac{f-f_0}{f+f_0},$$

где с = 1500 м/с – скорость звука в воде, f_0 – частота испускаемого сигнала (в МГц), f – частота отражённого сигнала (в МГц). Найдите частоту отражённого сигнала (в МГц), если батискаф погружается со скоростью 2 м/с.

c = 1500 м/с

f_0 = 749 МГц

v = 2 м/с

Подставим все значения в формулу и **найдём *f***:

$$v = c \cdot \frac{f-f_0}{f+f_0}$$

$$2 = 1500 \cdot \frac{f-749}{f+749}$$

$$\frac{f-749}{f+749} = \frac{2}{1500}$$

$$\frac{f-749}{f+749} = \frac{1}{750}$$

$$(f-749)\cdot 750 = (f+749)\cdot 1$$

$$750f - 750\cdot 749 = f + 749$$

$$750f - f = 749 + 750\cdot 749$$

$$749f = 749\cdot 1 + 750\cdot 749$$

$$749f = 749\cdot(1+750)$$

$$749f = 749\cdot 751 \,|\, :749$$

$$f = 751$$

Ответ: 751.

Задание 9. Текстовые задачи.

Весной катер идёт против течения реки в $1\frac{2}{3}$ раза медленнее, чем по течению. Летом течение становится на 1 км/ч медленнее. Поэтому летом катер идёт против течения в $1\frac{1}{2}$ раза медленнее, чем по течению. Найдите скорость течения весной (в км/ч).

	Весна	Лето
Скорость катера	x	x
Скорость течения	y	$y-1$
Скорость катера по течению	$x+y$	$x+(y-1)$
Скорость катера против течения	$x-y$	$x-(y-1)$
Уравнения:	$\frac{x+y}{x-y}=1\frac{2}{3}$	$\frac{x+(y-1)}{x-(y-1)}=1\frac{1}{2}$

Получили **систему уравнений**, решив её **найдём скорость течения весной** (y):

Задание 9. Текстовые задачи. (продолжение.)

Весной катер идёт против течения реки в $1\frac{2}{3}$ раза медленнее, чем по течению. Летом течение становится на 1 км/ч медленнее. Поэтому летом катер идёт против течения в $1\frac{1}{2}$ раза медленнее, чем по течению. Найдите скорость течения весной (в км/ч).

$$\begin{cases} \dfrac{x+y}{x-y}=1\dfrac{2}{3} \\ \dfrac{x+(y-1)}{x-(y-1)}=1\dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x+y}{x-y}=\dfrac{5}{3} \\ \dfrac{x+y-1}{x-y+1}=\dfrac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3\cdot(x+y)=5(x-y) \\ 2(x+y-1)=3(x-y+1) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x+3y=5x-5y \\ 2x+2y-2=3x-3y+3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x-5x=-5y-3y \\ 2x-3x+2y+3y-2-3=0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -2x=-8y \\ -x+5y-5=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=4y \\ -4y+5y-5=0 \end{cases}$$

$$-4y+5y-5=0$$

$$y=5$$

Ответ: 5.

ИЛИ **Задание 9. Текстовые задачи.**

Смешав 45-процентный и 97-процентный растворы кислоты и добавив 10 кг чистой воды, получили 62-процентный раствор кислоты. Если бы вместо 10 кг воды добавили 10 кг 50-процентного раствора той же кислоты, то получили бы 72-процентный раствор кислоты. Сколько килограммов 45-процентного раствора использовали для получения смеси?

	Концентрация кислоты	Масса раствора	Масса кислоты
1	0,45	x	$0{,}45 \cdot x$
2	0,97	y	$0{,}97 \cdot y$
3	0	10	0
1+2+3	0,62	$x + y + 10$	$\mathbf{0{,}62 \cdot (x + y + 10)}$
4	0,5	10	5
1+2+4	0,72	$x + y + 10$	$\mathbf{0{,}72 \cdot (x + y + 10)}$

Смешав 45-процентный и 97-процентный растворы кислоты и добавив 10 кг чистой воды, получили 62-процентный раствор кислоты. Если бы вместо 10 кг воды добавили 10 кг 50-процентного раствора той же кислоты, то получили бы 72-процентный раствор кислоты. Сколько килограммов 45-процентного раствора использовали для получения смеси?

Получили систему уравнений. Решив её найдём **массу 45-процентного раствора** кислоты (x):

$$\begin{cases} 0{,}45\cdot x + 0{,}97\cdot y + 0 = 0{,}62(x+y+10) & \mid \cdot 100 \\ 0{,}45\cdot x + 0{,}97y + 5 = 0{,}72(x+y+10) & \mid \cdot 100 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 45\cdot x + 97y = 62x + 6\ldots & (1) \\ 45x + 97y + 500 = 72x\ldots \end{cases}$$

$$\begin{cases} 45x - 62x + 97y - 62y \ldots \\ 45x - 72x + 97y - 72y \ldots \end{cases}$$

$$\begin{cases} -17x + 35y = 620 & (1) \\ -27x + 25y = 220 & (2) \end{cases} \Rightarrow \quad y = \frac{220+27y}{25} = 8{,}8 + 1{,}08x$$

$$-17x + 35(8{,}8 + 1{,}08x) = 620$$

$$-17x + 308 + 37{,}8x = 620$$

$$20{,}8x = 312$$

$$x = 15$$

Ответ: 15.

ИЛИ

Задание 9. Текстовые задачи.

Автомобиль, движущийся с постоянной скоростью 70 км/ч по прямому шоссе, обгоняет другой автомобиль, движущийся в ту же сторону с постоянной скоростью 40 км/ч. Каким будет расстояние (в километрах) между этими автомобилями через 15 минут после обгона?

Скорость удаления автомобилей друг от друга:

70 – 40 = **30 км/ч**

$$15 \text{ минут} = \frac{15}{60} = \frac{1}{4} \text{ часа}$$

Расстояние через 15 минут после обгона:

$$\frac{1}{4} \cdot 30 = 7,5 \text{ км}$$

Ответ: 7,5.

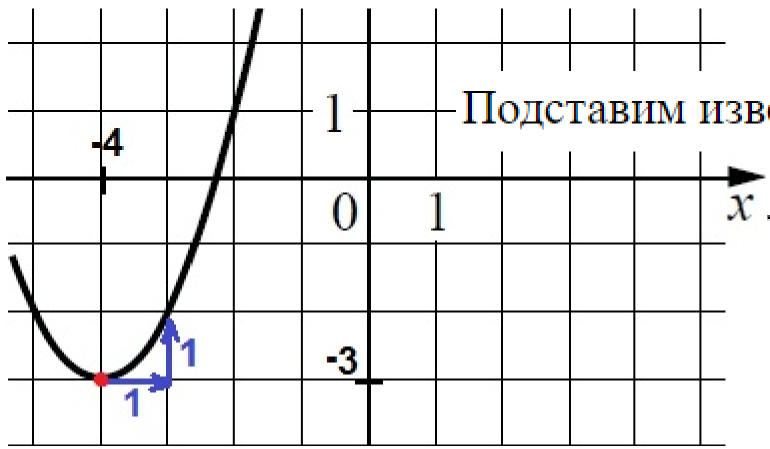
Задание 10. Графики функций.

На рисунке изображён график функции вида $f(x) = ax^2 + bx + c$, где числа a, b и c – целые. Найдите значение $f(-12)$.

По графику видим, что у данной параболы коэффициент $\boldsymbol{a = 1}$.

Вершина параболы находится в точке **(–4; –3)**. **Координата** $\boldsymbol{x}$ **вершины** параболы находится **по формуле**:

$$x = \frac{-b}{2a}$$



Подставим известные значения и **найдём** $\boldsymbol{b}$:

$$-4 = \frac{-b}{2 \cdot 1}$$

$$-b = -4 \cdot 2$$

$$\boldsymbol{b = 8}$$

Подставив координаты вершины параболы x и y **найдём коэффициент** $\boldsymbol{c}$:

$$y = ax^2 + bx + c$$

$$-3 = 1 \cdot (-4)^2 + 8 \cdot (-4) + c$$

$$-3 = 16 - 32 + c$$

$$\boldsymbol{c = 13}$$

Функция имеет вид: $\boldsymbol{f(x) = 1 \cdot x^2 + 8x + 13}$

Найдём $\boldsymbol{f(-12)}$:

$$\boldsymbol{f(-12) =} 1 \cdot (-12)^2 + 8 \cdot (-12) + 13 = 144 - 96 + 13 \boldsymbol{= 61}$$

Ответ: 61.

Задание 11. Наибольшее и наименьшее значение функций.

Найдите наименьшее значение функции

на отрезке [–10,5 ; 0].

$$y = 9x - 9\ln(x + 11) + 7$$

1. Найти первую производную функции.

$$y' = (9x)' - (9\,ln(x + 11))' + (7)' = 9 - \frac{9}{x + 11}$$

2. Приравнять первую производную к 0 и решить уравнение относительно икс (найти критические точки). Проверить, принадлежат ли они нужному нам отрезку.

$y' = 0,$ если

$$9 - \frac{9}{x + 11} = 0$$

$$\frac{9}{x + 11} = 9$$

$$x + 11 = 1$$

$$x = -10$$

3. Подставить числовые значения концов отрезка и критической точки (если она принадлежит данному отрезку) в уравнение **ФУНКЦИИ,** а не производной, и выбрать наименьшее. Те выражения, которые невозможно посчитать обычным способом в расчет не берем, т.к. в бланке ответов на экзамене мы должны будем записать либо целое число, либо десятичную дробь.

$$y(0) = 9ln11 + 7$$

$$y(-10{,}5) = -94{,}5 - 9ln0{,}5 + 7$$

$$y(-10) = -90 - 9ln1 + 7 = -90 + 7 = -83$$

Ответ: -83.

ИЛИ

Задание 11. Наибольшее и наименьшее значение функций.

Найдите точку максимума функции $y = (x + 8)^2 \cdot e^{3-x}$

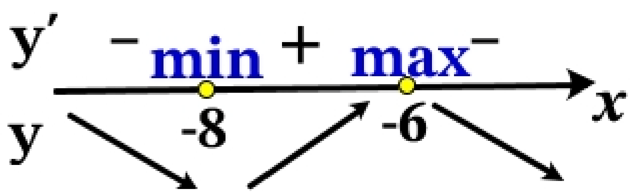
Найдем **производную** функции:

$$\mathbf{y'} = ((x+8)^2)' \cdot e^{3-x} + (x+8)^2 \cdot (e^{3-x})' = 2 \cdot (x+8) \cdot (x+8)' \cdot e^{3-x} + (x+8)^2 \cdot e^{3-x} \cdot (3-x)'$$

$$= 2 \cdot (x+8) \cdot e^{3-x} - (x+8)^2 \cdot e^{3-x} = \mathbf{e^{3-x} \cdot (2 \cdot (x+8) - (x+8)^2)}$$

$$e^{3-x} \cdot (2(x+8) - (x+8)^2) = 0$$

Определим знаки производной функции и изобразим поведение функции:



Точка **максимума**: $\boldsymbol{x = -6}$.

$$x_1 = \frac{-14+2}{2} = -6.$$

$$x_2 = \frac{-14-2}{2} = -8$$

Ответ: –6.

ИЛИ

Задание 11. Наибольшее и наименьшее значение функций.

Найдите точку минимума функции $y = -\frac{x}{x^2+256}$.

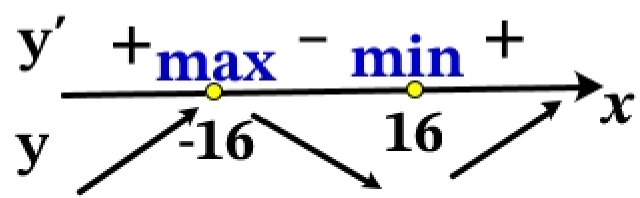
Найдем **производную** функции:

$$y' = \frac{(-x)'\cdot(x^2+256)-(-x)\cdot(x^2+256)'}{(x^2+256)^2} = \frac{-(x^2+256)+2x^2}{(x^2+256)^2} = \frac{x^2-256}{(x^2+256)^2}$$

Найдем **нули производной**:

$$\frac{x^2-256}{(x^2+256)^2} = 0$$

Определим знаки производной функции и изобразим поведение функции:



Точка **минимума**: x **= 16**.

Ответ: 16.

Задание 12. Уравнения.

а) Решите уравнение

$$2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+\cos 2x=\sqrt{3}\cos x+1.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов: пункта *а* и пункта *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*2*

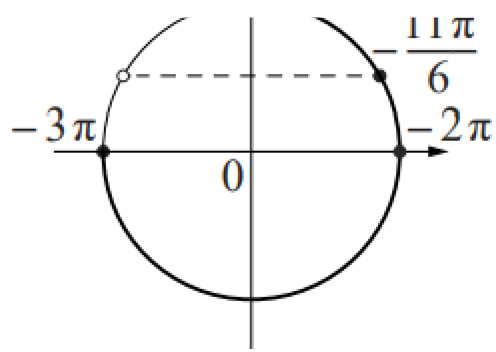
Реш

$\sin x$

Знач

или

б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi;-\frac{3\pi}{2}\right]$.



Ответ: а) πk, $k\in\mathbb{Z}$; $\frac{\pi}{6}+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$;

$\frac{5\pi}{6}+2\pi m$, $m\in\mathbb{Z}$;

б) -3π; -2π; $-\frac{11\pi}{6}$.

Типичные ошибки

1. Если отбор корней производится с помощью тригонометрического круга, то на круге должен быть явно выделен промежуток, заданный в условии задачи; помечены его границы и отмечены все корни, попадающие в этот промежуток, при этом нужно показать, как эти корни получены.
2. Если отбор корней производится путем перебора значений целочисленной постоянной в формуле корней, то после того, как найдено нужное значение этой постоянной и получены нужные корни уравнения обязательно должно быть доказано, что другие значения постоянной не подходят, т.е. проверить, что меньшие и

3. Если отбор корней производится с помощью решения двойных неравенств, то, разумеется, должны быть найдены не только значения постоянной, но и сами корни, соответствующие этому значению постоянной, т.е. решение должно быть завершено.

4. Если отбор корней производится с помощью графика, то обязательно должен присутствовать адекватный рисунок этого графика, на котором указаны: заданный промежуток и те корни уравнения, которые в него попадают и при каких значениях постоянной n.

Задание 13. Стереометрическая задача.

Все рёбра правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ имеют длину 6. Точки

М и

а) Д

б) Н

Реш

Вме

тог

тре

угл

б) I

NP

Поз

Пря

о тр

уго

Дл

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Получен обоснованный ответ в пункте *б* ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, ИЛИ при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	*3*

2

Поэтому $\sin\angle NMP = \frac{NP}{MN} = \frac{3\sqrt{3}}{2\cdot 3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{8}}$. Следовательно, $\angle NMP = \arcsin\sqrt{\frac{3}{8}}$.

Ответ: б) $\arcsin\sqrt{\frac{3}{8}}$.

Типичные ошибки

- При выполнении пункта а) участники допускали разного рода ошибки при построении чертежа, либо описание построения плоскости α отсутствовало.
- Небрежность записи проведенных доказательств, с логическим пропусками и неверными утверждениями. Участники экзамена демонстрировали неумение доказывать геометрические утверждения, непонимание взаимосвязи между элементами геометрической конструкции, ошибки в формулировках теоретических фактов,
- логические ошибки (подмена утверждения, которое следует доказать, на известный факт: т.е. утверждения такого типа «Пусть имеем факт А», (который нужно доказать), затем следуют некие манипуляции, опирающиеся на это допущение, после которых утверждается, что факт А имеет место).

Задание 14. Неравенства.

Решите неравенство $log_{11}(8x^2+7) - log_{11}(x^2+x+1) \geq \; log_{11}(\frac{x}{x+5}+7)$.

Решение. Правая часть неравенства определена при $x < -5$ и $x > -\frac{35}{8}$.

Поскольку при любых значениях x выражение $8x^2+7$ принимает

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением точек -12 и/или 0, ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

получаем: $x \ge -12$; $-\frac{35}{8} < x \le 0$.

Ответ: $(-\infty; -12]$; $\left(-\frac{35}{8}; 0\right]$.

Типичные ошибки

– плохое знание свойств логарифмической функции и свойств неравенств,

– слабые навыки в использовании метода интервалов при решении неравенств,

– арифметические ошибки,

– отсутствие базовых умений, связанных с решением дробно-рациональных неравенств, нахождением ОДЗ, решением систем неравенств и т.п.
Наиболее распространенной была ошибка в нахождении ОДЗ.

отбрасывание знаменателя при решении дробно-рационального неравенства;

неумение находить корни многочленов степени выше второй,

неумение раскладывать многочлен на простейшие множители.

группа учащихся, применявших «обобщенный метод интервалов», продемонстрировала формальное понимание метода: решение давалось вообще без каких либо пояснений. Нередко вместо неравенства рассматривалось уравнение, находились его корни и сразу записывался ответ (без малейших пояснений и обоснований).

Задание 15. Финансовая математика.

15 января планируется взять кредит в банке на шесть месяцев в размере 1 млн рублей. Условия его возврата таковы:

– 1-го числа каждого месяца долг увеличивается на r процентов по сравнению с концом предыдущего месяца, где r – целое число;

– со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

– 15-го числа каждого месяца долг должен составлять некоторую сумму в соответствии со следующей таблицей.

Дата	15.01	15.02	15.03	15.04	15.05	15.06	15.07
Долг (в млн рублей)	1,0	0,6	0,4	0,3	0,2	0,1	0

Найдите наибольшее значение *r*, при котором общая сумма выплат будет меньше 1,2 млн рублей.

Задание 15. Финансовая математика. (продолжение)

Решение. По условию долг перед банком (в млн рублей) на 15-е число каждого месяца должен уменьшаться до нуля следующим образом:

$$1;\ 0{,}6;\ 0{,}4;\ 0{,}3;\ 0{,}2;\ 0{,}1;\ 0.$$

Пусть $k = 1 + \frac{r}{100}$, тогда долг на 1-е число каждого месяца равен:

$$k;\ 0{,}6k;\ 0{,}4k;\ 0{,}3k;\ 0{,}2k;\ 0{,}1k.$$

Следовательно, выплаты со 2-го по 14-е число каждого месяца составляют:

$$k-0{,}6;\ 0{,}6k-0{,}4;\ 0{,}4k-0{,}3;\ 0{,}3k-0{,}2;\ 0{,}2k-0{,}1;\ 0{,}1k.$$

Общая сумма выплат составляет:

$$k(1+0{,}6+0{,}4+0{,}3+0{,}2+0{,}1)-(0{,}6+0{,}4+0{,}3+0{,}2+0{,}1)=$$
$$=(k-1)(1+0{,}6+0{,}4+0{,}3+0{,}2+0{,}1)+1=2{,}6(k-1)+1.$$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Верно построена математическая модель	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*2*

Типичные ошибки

построение неверной модели, т.е. модели, не соответствующей условию задачи;

- вычислительные ошибки;
- отсутствие доказательств заявленных утверждений.

Были предъявлены «решения», в которых ученики без всяких обоснований писали сразу формулу (не всегда имеющую отношение к задаче) или пытались решить задачу подбором. Видимо, многие участники экзамена считали, что решать задачу не обязательно, достаточно каким-то образом получить ответ.

Решения другой части учащихся «грешили» полным отсутствием каких-либо пояснений при составлении математической модели.

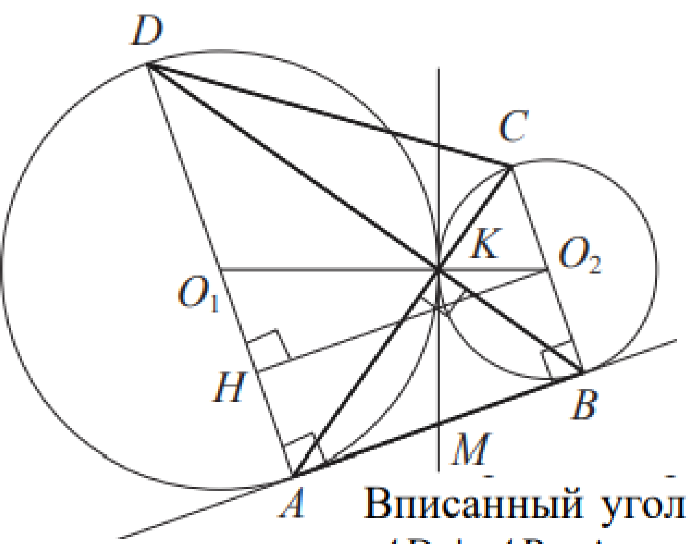
Третья часть учащихся, получив неверный ответ, не пытались оценить его правильность, несмотря на то, что получены результаты, явно противоречащие условиям и здравому смыслу.

Задание 16. Планиметрическая задача.

Две окружности касаются внешним образом в точке K. Прямая AB касается первой окружности в точке A, а второй – в точке B. Прямая BK пересекает первую окружность в точке D, прямая AK пересекает вторую окружность в точке C.

а) Докажите, что прямые AD и BC параллельны.

б) Найдите площадь треугольника AKB, если известно, что радиусы окружностей равны 4 и 1.



Решение. а) Обозначим центры окружностей O_1 и O_2 соответственно. Пусть общая касательная, проведённая к окружностям в точке K, пересекает AB в точке M. По свойству касательных, проведённых из одной точки, $AM = KM$ и $KM = BM$. Треугольник AKB, у которого медиана равна половине стороны, к которой она проведена, прямоугольный.

Вписанный угол AKD прямой, поэтому он опирается на диаметр AD. Значит, $AD \perp AB$. Аналогично получаем, что $BC \perp AB$. Следовательно, прямые AD и BC параллельны.

б) Пусть, для определённости, первая окружность имеет радиус 4, а вторая – радиус 1.

Задание 16. Планиметрическая задача.

Две окружности касаются внешним образом в точке K. Прямая AB касается первой окружности в точке A, а второй – в точке B. Прямая BK пересекает первую окружность в точке D, прямая AK пересекает вторую окружность в точке C.

а) Докажите, что прямые AD и BC параллельны.

б) Найдите площадь треугольника AKB, если известно, что радиусы окружностей равны 4 и 1.

имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Получен обоснованный ответ в пункте *б* ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, ИЛИ при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	*3*

Задание 17.Задача с параметром.

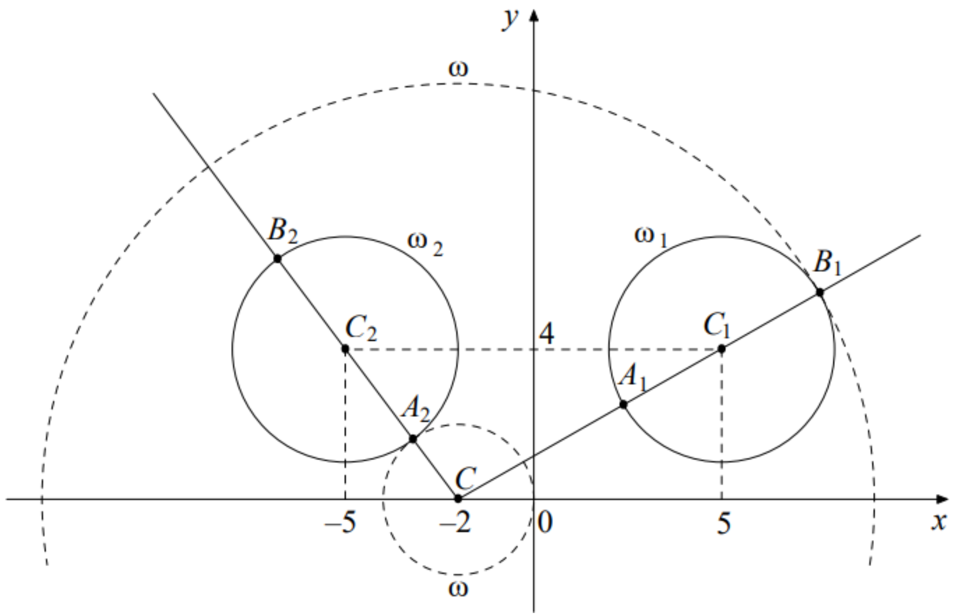
Найдите все положительные значения a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} (|x|-5)^2+(y-4)^2=9, \\ (x+2)^2+y^2=a^2 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

Решение. Если $x \geq 0$, то уравнение $(|x|-5)^2+(y-4)^2=9$ задаёт окружность ω_1 с центром в точке $C_1(5;\ 4)$ и радиусом 3, а если $x<0$, то оно задаёт окружность ω_2 с центром в точке $C_2(-5;\ 4)$ и таким же радиусом (см. рисунок).

При положительных значениях a уравнение $(x+2)^2+y^2=a^2$ задаёт окружность ω с центром в точке $C(-2;\ 0)$ и радиусом a. Поэтому задача состоит в том, чтобы найти все значения a, при каждом из которых окружность ω имеет единственную общую точку с объединением окружностей ω_1 и ω_2.



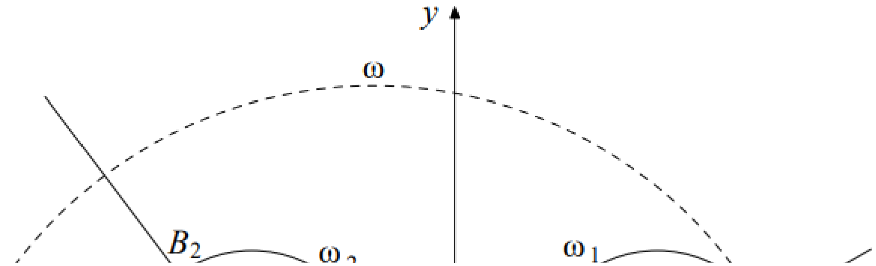
Из точки C проведём луч CC_1 и обозначим через A_1 и B_1 точки его пересечения с окружностью ω_1, где A_1 лежит между C и C_1. Так как $CC_1 = \sqrt{(5+2)^2 + 4^2} = \sqrt{65}$, то $CA_1 = \sqrt{65} - 3$, $CB_1 = \sqrt{65} + 3$.

При $a < CA_1$ или $a > CB_1$ окружности ω и ω_1 не пересекаются.

При $CA_1 < a < CB_1$ окружности ω и ω_1 имеют две общие точки.

При $a = CA_1$ или $a = CB_1$ окружности ω и ω_1 касаются.

Из точки C проведём луч CC_2 и обозначим через A_2 и B_2 точки его пересечения с окружностью ω_2, где A_2 лежит между C и C_2. Так как $CC_2 = \sqrt{(-5+2)^2 + 4^2} = 5$, то $CA_2 = 5 - 3 = 2$, $CB_2 = 5 + 3 = 8$.



Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получены оба верных значения параметра, но – или в ответ включены также и одно-два неверных значения; – или решение недостаточно обосновано	3
С помощью верного рассуждения получено хотя бы одно верное значение параметра	2
Задача сведена к исследованию: – или взаимного расположения трёх окружностей; – или двух квадратных уравнений с параметром	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*4*

При

При

При

Исх… да

окр… не

пересекается с другой. Так как $CA_2 < CA_1 < CB_2 < CB_1$, то условию задачи удовлетворяют только числа $a = 2$ и $a = \sqrt{65} + 3$.

Ответ: 2; $\sqrt{65} + 3$.

Типичные ошибки

- непонимание логики задачи и плохой анализ условия;
- отсутствие полноценного исследования ситуации, предлагаемой в условии; неумение делать необходимые логические обоснования и выводы;
- отсутствие навыков построения аналитических рассуждений; ошибки при составлении ограничений на параметр и искомую величину; распространенная ошибка при решении этой задачи – не учитывался ОДЗ при поиске корней уравнения, и как результат - приобретение посторонних решений или потеря решений;
- неверное построение графиков функций при использовании графического метода решения; вычислительные ошибки;
- неумение применять графический метод решения, который, как показала проверка работ, недостаточно сформирован у участников экзамена. Об этом свидетельствует массовое отсутствие описаний, сделанных чертежей и конструкций, а также значительное количество работ, в которых отсутствует ответ на поставленный вопрос, несмотря на обилие всевозможных построений и вычислений.

Задание 18.Числа и их свойства.

В школах № 1 и № 2 учащиеся писали тест. В каждой школе тест писали по крайней мере 2 учащихся, а суммарно тест писали 9 учащихся. Каждый учащийся, писавший тест, набрал натуральное количество баллов. Оказалось, что в каждой школе средний балл за тест был целым числом. После этого один из учащихся, писавших тест, перешёл из школы № 1 в школу № 2, а средние баллы за тест были пересчитаны в обеих школах.

а) Мог ли средний балл в школе № 1 уменьшиться в 10 раз?

б) Средний балл в школе № 1 уменьшился на 10%, средний балл в школе № 2 также уменьшился на 10%. Мог ли первоначальный средний балл в школе № 2 равняться 7?

в) Средний балл в школе № 1 уменьшился на 10%, средний балл в школе № 2 также уменьшился на 10%. Найдите наименьшее значение первоначального среднего балла в школе № 2.

Задание 18.Числа и их свойства. (продолжение)

В школах № 1 и № 2 учащиеся писали тест. В каждой школе тест писали по крайней мере 2 учащихся, а суммарно тест писали 9 учащихся. Каждый учащийся, писавший тест, набрал натуральное количество баллов. Оказалось, что в каждой школе средний балл за тест был целым числом. После этого один из учащихся, писавших тест, перешёл из школы № 1 в школу № 2, а средние баллы за тест были пересчитаны в обеих школах.

а) Мог ли средний балл в школе № 1 уменьшиться в 10 раз?

Решение. а) Пусть в школе № 1 писали тест 2 учащихся, один из них набрал 1 балл, а второй набрал 19 баллов и перешёл в школу № 2. Тогда средний балл в школе № 1 уменьшился в 10 раз.

Задание 18.Числа и их свойства. (продолжение)

В школах № 1 и № 2 учащиеся писали тест. В каждой школе тест писали по крайней мере 2 учащихся, а суммарно тест писали 9 учащихся. Каждый учащийся, писавший тест, набрал натуральное количество баллов. Оказалось, что в каждой школе средний балл за тест был целым числом. После этого один из учащихся, писавших тест, перешёл из школы № 1 в школу № 2, а средние баллы за тест были пересчитаны в обеих школах.

б) Средний балл в школе № 1 уменьшился на 10%, средний балл в школе № 2 также уменьшился на 10%. Мог ли первоначальный средний балл в школе № 2 равняться 7?

б) Пусть в школе № 2 писали тест m учащихся, средний балл равнялся B, а перешедший в неё учащийся набрал u баллов. Тогда получаем:

$$u = 0{,}9(m+1)B - mB;\ 10u = (9-m)B.$$

Если $B = 7$, то $(9-m)B$ не делится на 10, а $10u$ делится на 10. Но это невозможно, поскольку $10u = (9-m)B$.

Задание 18.Числа и их свойства. (продолжение)

В школах № 1 и № 2 учащиеся писали тест. В каждой школе тест писали по крайней мере 2 учащихся, а суммарно тест писали 9 учащихся. Каждый учащийся, писавший тест, набрал натуральное количество баллов. Оказалось,

Содержание критерия	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: – обоснованное решение пункта *а*; – обоснованное решение пункта *б*; – искомая оценка в пункте *в*; – пример в пункте *в*, обеспечивающий точность предыдущей оценки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*4*

если в школе № 1 писали тест 6 учащихся, 3 из них набрали по 1 баллу, а 3 – по 3 балла, в школе № 2 писали тест 3 учащихся и каждый набрал по 5 баллов, а у перешедшего из одной школы в другую учащегося – 3 балла.

Ответ: а) да; б) нет; в) 5.

Наставление

- Решайте как можно больше задач.
- Внимательно читайте условие и давайте тот ответ, о котором в нём спрашивают.
- Старайтесь решать задачи самыми простыми способами. Чем проще решение, тем меньше вероятность ошибки.
- Не волнуйтесь, если на первых порах вы долго решаете задачи. Просто продолжайте и со временем начнёте справляться быстрее.
- Не забывайте проверять результаты перед тем, как записываете окончательный ответ