Уравнения и неравенства в ОГЭ по математике.

Карнаухова Л.Н.

МАОУ гимназия №1 г. Тюмени

Уравнения. 1 часть.

Уравнение – равенство, содержащее неизвестное число, обозначенное буквой, значение которого надо найти.

Корень уравнения – значение неизвестного, при подстановке которого уравнение обращается в верное числовое равенство.

Решить уравнение – найти все его корни или установить, что их нет.

Типы уравнений

Линейные уравнения

Общий вид:

$ax = b$

Решение:

А) если $a \neq 0$, то $x = b : a = \frac{b}{a}$;

Б) если $a = b = 0$, то x – любое число;

В) если $a \neq 0, b = 0$, то нет корней.

Квадратные уравнения:

Полные

Общий вид:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$D = b^2 - 4ac$$

1) $D > 0$ 2 корня $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$

2) $D = 0$ 1 корень $x = \frac{-b}{2a}$

3) $D < 0$ корней нет

Приведенное:

$$x^2 + px + q = 0$$

Теорема Виета:

$$x^2 + px + q = 0$$

$$\begin{cases} x_1 \cdot x_2 = q, \\ x_1 + x_2 = -p \end{cases}$$

Линейные уравнения

Линейные уравнения

<u>Общий вид:</u>

$ax=b$

<u>Решение:</u>

А) если $a \neq 0$, то $x=b:a=\frac{b}{a}$;

Б) если $a=b=0$, то x – любое число;

В) если $a \neq 0, b=0$, то нет корней.

Пример 1. Найдите корень уравнения:

а) $10x=-80$,

$$10x=-80$$
$$x=-80:10$$
$$x=-8$$

б) $7x=0$,

$$7x=0$$
$$x=0:7$$
$$x=0$$

в) $40x=3$.

$$40x=3$$
$$x=3:40$$
$$x=\frac{3}{40}$$

Уравнения, сводящиеся к линейным

Уравнения, сводящиеся к линейным

Теорема 1. Если к обеим частям данного уравнения прибавить (или из обеих частей вычесть) одно и то же число, то получится уравнение, имеющее те же корни, что и данное.

Следствие. Если какое-нибудь слагаемое перенести из одной части уравнения в другую, изменив при этом его знак на противоположный, то получим уравнение, имеющее те же корни, что и данное.

Теорема 2. Если обе части уравнения умножить (или разделить) на одно и то же отличное от нуля число, то получим уравнение, имеющее те же корни, что и данное.

Пример 2. Найдите корень уравнения $12-3x=-4x+7$.

$12-3x=-4x+7$

$-3x+4x=7-12$

$x=-5$ Ответ: -5

Пример 3. Найдите корень уравнения $3(x-8)=-6+x$.

$3(x-8)=-6+x$

$3x-24=-6+x$

$3x-x=-6+24$

$2x=18 \quad |:2$

$x=9$

Ответ: 9

Пример 4. Найдите корень уравнения $x-\frac{x}{14}=\frac{13}{7}$.

$$\frac{x^{(14}}{1}-\frac{x^{\ (1}}{14}=\frac{13^{(2}}{7}$$

$$\frac{14x}{14}-\frac{x}{14}=\frac{26}{14} \qquad |\cdot 14$$

$14x-x=26$

$13x=26 \quad |:13$

$x=2$ Ответ: 2

Уравнения, сводящиеся к линейным

Правило пропорции:

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow a\cdot d=b\cdot c$$

В верной пропорции произведение крайних членов равно произведению средних.

Пример 5. Найдите корень уравнения $\frac{20}{x+4}=-\frac{8}{3}$.

$$\frac{20}{x+4}=-\frac{8}{3} \qquad |:4$$

$$\frac{5}{x+4}=-\frac{2}{3}$$

$x+4\neq0 \qquad x\neq-4$

по правилу пропорции:

$5\cdot3=(x+4)\cdot(-2)$

$15=-2x-8$

$2x=-8-15$

$2x=-23 \qquad |:2$

$x=-11,5$

Ответ: $-11,5$

Пример 6. Найдите корень уравнения $\frac{9}{x-7}=-10$.

$$\frac{9}{x-7}=-\frac{10}{1}$$

$x-7\neq0 \qquad x\neq7$

по правилу пропорции:

$9\cdot1=(x-7)\cdot(-10)$

$9=-10x+70$

$10x=70-9$

$10x=61 \qquad |:10$

$x=6,1$

Ответ: $6,1$

Уравнения, сводящиеся к линейным

Квадрат суммы/разности:

$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$

$(x-3)^2 = x^2 - 2 \cdot x \cdot 3 + 3^2 = x^2 - 6x + 9$

или

$(x-3)^2 = (x-3)(x-3) = x^2 - \underline{3x} - \underline{3x} + 9 =$

$= x^2 - 6x + 9$

Пример 7. Найдите корень уравнения $(x+4)^2 = (11-x)^2$.

$(x+4)^2 = (11-x)^2$

$(x+4)(x+4) = (11-x)(11-x)$

$x^2 + 4x + 4x + 16 = 121 - 11x - 11x + x^2$

$x^2 + 4x + 4x + 11x + 11x - x^2 = 121 - 16$

$30x = 105 \qquad |:30$

$x = 3,5$

Ответ: 3,5

Неполные квадратные уравнения

$ax^2=0$, $b=0$, $c=0$ $\qquad$ $ax^2 \pm bx=0$, $c=0$ $\qquad$ $ax^2 \pm c=0$, $b=0$

Пример 8. Решите уравнение $(4x-3)(-x+11)=0$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответ запишите меньший из корней.

$(4x-3)(-x+11)=0$

$ab=0 \Rightarrow a=0$ или $b=0$

$4x-3=0$

$4x=3 \quad |:4$

$x=\frac{3}{4}=0{,}75$

меньший корень

$-x+11=0$

$-x=-11 \quad |:(-1)$

$x=11$

Ответ: 0,75

Пример 9. Решите уравнение $6x^2+54x=0$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответ запишите больший из корней.

$6x^2+54x=0$

$6x(x+9)=0$

$ab=0 \Rightarrow a=0$ или $b=0$

$6x=0 \quad |:6$

$x=0$

больший корень

$x+9=0$

$x=-9$

Ответ: 0

Неполные квадратные уравнения

$ax^2=0$, $b=0$, $c=0$

$ax^2 \pm bx=0$, $c=0$

$ax^2 \pm c=0$, $b=0$

Пример 10. Решите уравнение $x^2-400=0$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответ запишите меньший из корней.

$x^2-400=0$

$x^2-(20)^2=0$ – разность квадратов

$(x-20)(x+20)=0$

$x-20=0$ $\qquad$ $x+20=0$

$x=20$ $\qquad$ $x=-20$

меньший корень

Ответ: -20

Пример 11. Решите уравнение $8x^2-56x=0$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответ запишите больший из корней.

$8x^2-56x=0$

$8x(x-7)=0$

$ab=0 \Rightarrow a=0$ или $b=0$

$8x=0 \quad |:8$ $\qquad$ $x-7=0$

$x=0$ $\qquad$ $x=7$

больший корень

Ответ: 7

Полные квадратные уравнения

Полные

Общий вид:

$$ax^2+bx+c=0$$

$$D=b^2-4ac$$

1) $D>0$ 2 корня $x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$

2) $D=0$ 1 корень $x=\dfrac{-b}{2a}$

3) $D<0$ корней нет

Приведенное:

$$x^2+px+q=0$$

Теорема Виета:

$$x^2+px+q=0$$

$$\begin{cases} x_1\cdot x_2=q, \\ x_1+x_2=-p \end{cases}$$

Пример 12. Решите уравнение $x^2+48=14x$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответ запишите меньший из корней.

$$x^2+48=14x$$

$$x^2-14x+48=0$$

$$\begin{cases} x_1\cdot x_2=48, \\ x_1+x_2=+14 \end{cases}$$

$$x_1=8$$

$$x_2=6 - \textit{меньший корень}$$

Ответ: 6

Пример 13. Решите уравнение $x^2-27=6x$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответ запишите больший из корней.

$$x^2-27=6x$$

$$x^2-6x-27=0$$

$$\begin{cases} x_1\cdot x_2=-27, \\ x_1+x_2=+6 \end{cases}$$

$$x_1=9 - \textit{больший корень}$$

$$x_2=-3$$

Ответ: 9

Полные квадратные уравнения

Пример 14. Решите уравнение $4x^2-14x-18=0$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответ запишите меньший из корней.

$$4x^2-14x-18=0 \qquad |:2$$
$$2x^2-7x-9=0$$
$$a=2 \qquad b=-7 \qquad c=-9$$
$$D=b^2-4ac$$
$$D=(-7)^2-4\cdot2\cdot(-9)=49+72=121>0$$
$$x_1=\frac{-(-7)+\sqrt{121}}{2\cdot2}=\frac{7+11}{4}=4{,}5$$
$$x_2=\frac{-(-7)-\sqrt{121}}{2\cdot2}=\frac{7-11}{4}=-1\ (\textit{меньш.})$$

Ответ: -1

Пример 15. Решите уравнение $5x^2+12x+4=0$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответ запишите больший из корней.

$$5x^2+12x+4=0$$
$$a=5 \qquad b=12 \qquad c=4$$
$$D=b^2-4ac$$
$$D=12^2-4\cdot5\cdot4=144-80=64>0$$
$$x_1=\frac{-12+\sqrt{64}}{2\cdot5}=\frac{-12+8}{10}=-0{,}4\ (\textit{больш.})$$
$$x_2=\frac{-12-\sqrt{64}}{2\cdot5}=\frac{-12-8}{10}=-2$$

Ответ: $-0{,}4$

Неравенства

Решением неравенства с одним неизвестным называется то значение неизвестного, при котором это неравенство обращается в верное числовое неравенство.

Решить неравенство – найти все его решения или установить, что их нет.

Свойства неравенств

1. Любой член неравенства можно перенести из одной части неравенства в другую с противоположным знаком, при этом знак неравенства не меняется.
2. Обе части неравенства можно умножить или разделить на одно и то же число, не равное нулю. Если число положительно, то знак неравенства не меняется, если отрицательно – знак неравенства меняется на противоположный.

Неравенства

Линейные неравенства

Общий вид:

$ax > b \quad ax \geq b$

$ax < b \quad ax \leq b$

Алгоритм решения неравенств, сводящихся к линейным:

1) перенести члены, содержащие неизвестное, в левую часть, а члены, не содержащие неизвестное, в правую (свойство 1);
2) приведя подобные члены, разделить обе части неравенства на коэффициент при неизвестном, если он не равен нулю (свойство 2).

Пример 1. Решите неравенство:

а) $6x - 7 > 10x + 5$

$6x - 10x > 5 + 7$

$-4x > 12 \quad |:(-4) \quad \mathbf{-4 < 0}$

$x < -3$

$x \in (-\infty; -3)$

б) $17x - 4(3x - 8) \geq 80$

$17x - 12x + 32 \geq 80$

$5x \geq 80 - 32$

$5x \geq 48 \quad |:5$

$x \geq 9{,}6$

$x \in [9{,}6; +\infty)$

Системы неравенств

Решением системы неравенств с одним неизвестным называется то значение неизвестного, при котором все неравенства системы обращаются в верные числовые неравенства.

Решить систему неравенств – найти все решения этой системы или установить, что их нет.

Системы двух линейных неравенств

Алгоритм:
1) решить оба неравенства;
2) изобразить на числовой оси множество решений первого и второго неравенств системы;
3) определить значения неизвестного, которые одновременно принадлежат обоим интервалам.

Пример 2. Решите систему неравенств:

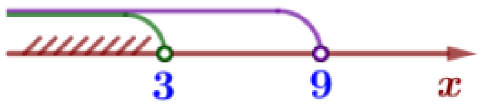
а) $\begin{cases} x-2{,}1\le 0 \\ -2x+2\le 3 \end{cases}$ $\begin{cases} x\le 2{,}1 \\ -2x\le 1 \quad |:(-2) \end{cases}$

$\begin{cases} x\le 2{,}1 \\ -2x\le 3-2 \end{cases}$ $\begin{cases} x\le 2{,}1 \\ x\ge -0{,}5 \end{cases}$

$x\in[-0{,}5;\, 2{,}1]$

б) $\begin{cases} -72+8x<0 \\ 5-6x>-13 \end{cases}$ $\begin{cases} x<9 \\ -6x>-18 \quad |:(-6) \end{cases}$

$\begin{cases} 8x<72 \quad |:8 \\ -6x>-13-5 \end{cases}$ $\begin{cases} x<9 \\ x<3 \end{cases}$



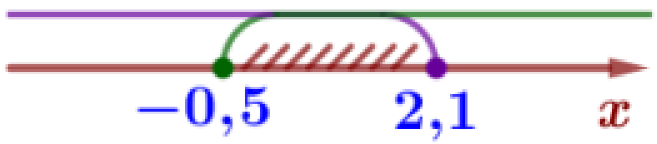
$x\in(-\infty;\, 3)$

Системы неравенств

Пример 2. Решите систему неравенств:

а) $\begin{cases} x-2{,}1\le 0 \\ -2x+2\le 3 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x\le 2{,}1 \\ -2x\le 1 \end{cases} \quad |:(-2)$

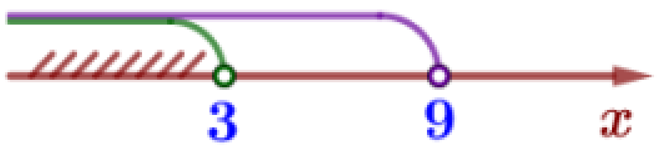
$\begin{cases} x\le 2{,}1 \\ -2x\le 3-2 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x\le 2{,}1 \\ x\ge -0{,}5 \end{cases}$



$x\in[-0{,}5;\, 2{,}1]$

б) $\begin{cases} -72+8x<0 \\ 5-6x>-13 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x<9 \\ -6x>-18 \end{cases} \quad |:(-6)$

$\begin{cases} 8x<72 \quad |:8 \\ -6x>-13-5 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x<9 \\ x<3 \end{cases}$



$x\in(-\infty;\, 3)$

Квадратные неравенства

Общий вид:

$$ax^2+bx+c \vee 0, \quad a \neq 0$$

$\vee$ – знак неравенства

$(\leq, \geq, <, >)$

Способы решения:

С помощью графика квадратичной функции

Алгоритм:

1) найти действительные корни квадратного уравнения $ax^2+bx+c=0$ или установить, что их нет;
2) определить направление ветвей параболы $y=ax^2+bx+c$;
3) изобразить эскиз графика квадратичной функции, используя точки пересечения (касания) с осью Ox, если они есть;
4) по графику определить промежутки, на которых функция принимает нужные значения.

Метод интервалов

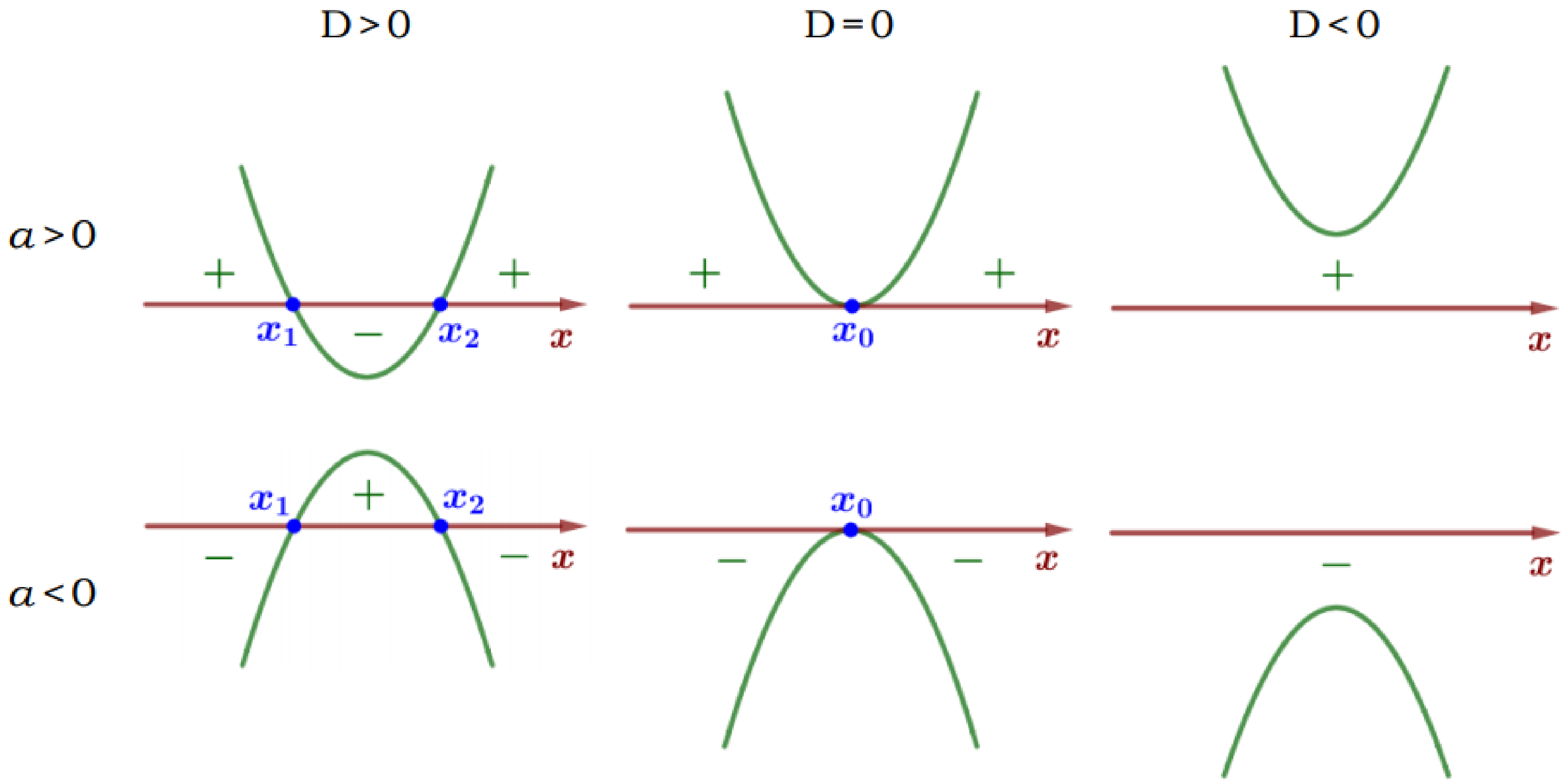
Алгоритм:

1) найти нули функции $y=ax^2+bx+c$, решив квадратное уравнение $ax^2+bx+c=0$;
2) отметить положение нулей на оси Ox;
3) определить знаки функции в промежутках между нулями;

Графический способ решения квадратных неравенств

<u>Алгоритм:</u>

1) найти действительные корни квадратного уравнения $ax^2+bx+c=0$ или установить, что их нет;
2) определить направление ветвей параболы $y=ax^2+bx+c$;
3) изобразить эскиз графика квадратичной функции, используя точки пересечения (касания) с осью Ox, если они есть;
4) по графику определить промежутки, на которых функция принимает нужные значения.



Графический способ решения квадратных неравенств

Пример 6. Решите неравенство $x^2+12x+32\le 0$.

$x^2+12x+32\le 0$

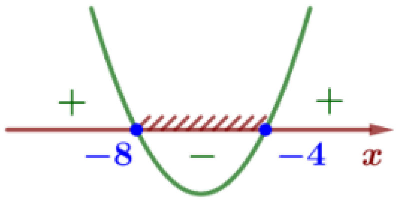
$x^2+12x+32=0$

$D=b^2-4ac=12^2-4\cdot 1\cdot 32=16$

$x_1=\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}=\frac{-12-\sqrt{16}}{2\cdot 1}=-8$

$x_2=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}=\frac{-12+\sqrt{16}}{2\cdot 1}=-4$

$a=1>0$ ветви вверх



Ответ: $x\in[-8;-4]$

Пример 7. Решите неравенство $7x-x^2<0$.

$7x-x^2<0$

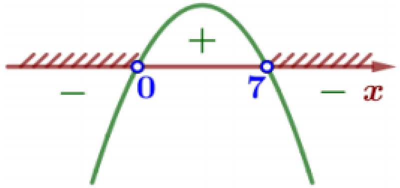
$7x-x^2=0$

$x(7-x)=0$

$x=0\quad 7-x=0$

$x=7$

$a=-1<0$ ветви вниз



Ответ:
$x\in(-\infty;0)\cup(7;+\infty)$

Пример 8.
Решите неравенство $x^2+100<0$.

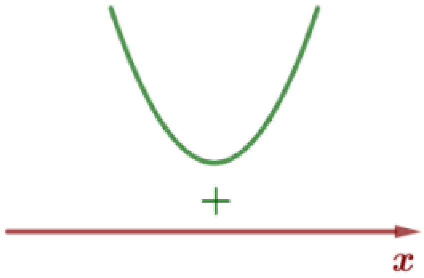
$x^2+100<0$

$x^2+100=0$

$x^2=-100$

корней нет

$a=1>0$ ветви вверх



Ответ:
неравенство не имеет решений

Алгоритм:

1) найти действительные корни квадратного уравнения или установить, что их нет;
2) определить направление ветвей параболы;
3) изобразить эскиз графика квадратичной функции, используя точки пересечения (касания) с осью Ох, если они есть;
4) по графику определить промежутки, на которых функция принимает нужные значения

Метод интервалов

Алгоритм:

1) найти нули функции $y=ax^2+bx+c$, решив квадратное уравнение $ax^2+bx+c=0$;

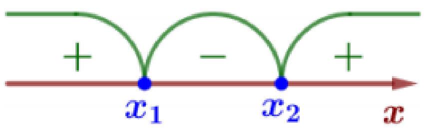
2) отметить положение нулей на оси Ox;

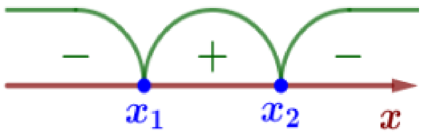
3) определить знаки функции в промежутках между нулями;

A. вычислить значение функции в точке $x=0$ (или, например, $x=1$), отметить знак в соответствующем промежутке,

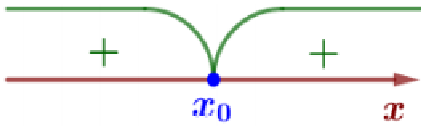
B. определить знаки в остальных промежутках по правилу:

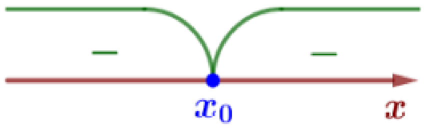
$D>0$ (2 корня)
знаки чередуются



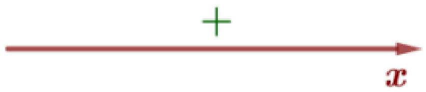


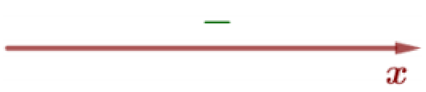
$D=0$ (1 корень)
знаки совпадают





$D<0$ (нет корней)
функция сохраняет знак
на всей числовой оси





4) выбрать промежутки, на которых функция принимает нужные значения.

Пример 9. Решите неравенство $4x^2 \geq 9$.

$4x^2 \geq 9$

$4x^2-9 \geq 0$

$4x^2-9=0$

$(2x-3)(2x+3)=0$

$2x-3=0 \qquad 2x+3=0$

$2x=3 \qquad 2x=-3$

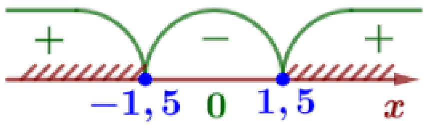
$x=1{,}5 \qquad x=-1{,}5$

при $x=0$

$4x^2-9=4\cdot 0^2-9=-9<0 \Rightarrow$

на интерале $(-1{,}5; 1{,}5)$

знак "−"



Ответ: $x \in (-\infty; -1{,}5] \cup [1{,}5; +\infty)$

Метод интервалов

Пример 10. Решите неравенство $x^2-2x+15<0$.

$x^2-2x+15<0$

$x^2-2x+15=0$

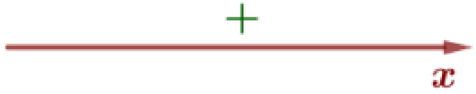
$D=b^2-4ac$

$D=(-2)^2-4\cdot 1\cdot 15=-56<0$

корней нет

при $x=0$ $\quad x^2-2x+15=0^2-2\cdot 0+15=15>0$

на всей числовой оси знак "+"



Ответ: неравенство не имеет решений

Пример 11. Решите неравенство $x^2+12>0$.

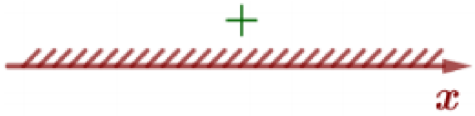
$x^2+12=0$

$x^2=-12$

корней нет

при $x=0$ $\quad x^2+12=0^2+12=12>0$

на всей числовой оси знак "+"



Ответ: $x\in\mathbb{R}$, то есть x – любое число

1) найти нули функции, решив квадратное уравнение;
2) отметить положение нулей на оси Ox;
3) определить знаки функции в промежутках между нулями;

A. вычислить значение функции в точке x =0 (или, например, x =1), отметить знак в соответствующем промежутке,

B. определить знаки в остальных промежутках по правилу

Метод интервалов

Пример 12. Укажите неравенство, решение которого изображено на рисунке:

1) $x^2-81<0$ 2) $x^2-81>0$ 3) $x^2-9x<0$ 4) $x^2-9x>0$

Решим неравенство №1:

$x^2-81<0$

$x^2-81=0$

$(x-9)(x+9)=0$

$x-9=0 \qquad x+9=0$

$x=9 \qquad x=-9$

Корни **не** совпадают с данными рисунка.

Такие же корни даст неравенство №2, поэтому его тоже можно проигнорировать.

Решим неравенство №3:

$x^2-9x<0$

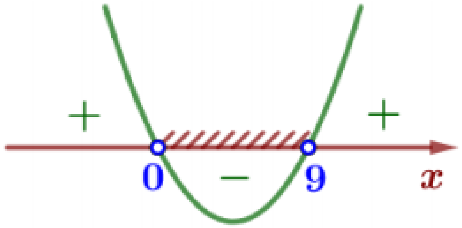
$x^2-9x=0$

$x(x-9)=0$

$x=0 \qquad x-9=0$

$x=9$

$a=1>0$ ветви вверх



Решение совпадает с изображенным на рисунке, в ином случае верным было бы неравенство №4.

Ответ: 3

Рациональные уравнения

Рациональное уравнение – это такое уравнение, в обеих частях которого содержатся рациональные выражения.

Рациональное уравнение будет являться целым в том случае, если в записи левой и правой его частей содержатся целые рациональные выражения.

Рациональное уравнение будет являться дробным в том случае, если одна или обе его части содержат дробь.

Решить уравнение

$$x^3 + x^2 = 9x + 9.$$

В ответе запишите произведение его корней.

Решение. **Запишем уравнение в виде**

$$x^3 + x^2 - 9x - 9 = 0.$$

Разложим на множители левую часть уравнения:

$$(x^3 + x^2) - (9x + 9) = 0,\ x^2(x + 1) - 9(x + 1) = 0,$$

$$(x + 1)(x^2 - 9) = 0,\ (x + 1)(x - 3)(x + 3) = 0.$$

В данном случае произведение равно нулю, если один из множителей равен нулю. Получим: $x - 3 = 0$, или $x + 3 = 0$, или $x + 1 = 0$. Корни уравнения: $x_1 = 3$, $x_2 = -3$, $x_3 = -1$. Произведение корней: $x_1x_2x_3 = 9$.

Ответ: **9.**

Дробно-рациональные уравнения

Уравнение вида $\frac{f(x)}{g(x)}=0$ называется дробно-рациональным. Его решение сводится к решению системы $\begin{cases} f(x)=0, \\ g(x)\neq 0. \end{cases}$

. Найти наибольший корень уравнения

$$\frac{2}{x^2+5x}+\frac{3}{2x-10}=\frac{15}{x\left(x^2-25\right)}.$$

Решение. Найдем область допустимых значений переменной уравнения, предварительно приведя его к виду

$$\frac{2}{x(x+5)}+\frac{3}{2(x-5)}=\frac{15}{x(x-5)(x+5)}:$$

$x\neq 0$, $x\neq 5$, $x\neq -5$. Домножив обе части уравнения на общий знаменатель $2x(x+5)(x-5)$, получим уравнение:

$$4(x-5)+3x(x+5)=30,$$

$$3x^2+19x-50=0,$$

$$D=961,\ x=\frac{-19\pm 31}{6},\ x_1=2,\ x_2=-\frac{25}{3}$$

— оба числа удовлетворяют условию $x\neq 0$, $x\neq 5$, $x\neq -5$. Наибольший корень $x=2$.

Ответ: 2.

Иррациональные уравнения

Иррациональное уравнение имеет вид: $\sqrt{f(x)} = g(x)$.

Уравнение $\sqrt{f(x)} = g(x)$ равносильно системе:

$$\begin{cases} f(x) \geq 0, \\ g(x) \geq 0, \\ f(x) = g^2(x). \end{cases}$$

В системе есть избыточное условие: из уравнения следует выполнение первого неравенства. Избыток не является ошибкой. Так лучше запоминается: арифметический квадратный корень определен для неотрицательного числа; арифметический квадратный корень принимает неотрицательные значения; корнем из неотрицательного числа является такое неотрицательное число, квадрат которого равен числу, записанному под корнем.

Другое решение часто называют «методом равносильности».

Уравнение $\sqrt{f(x)} = g(x)$ равносильно системе:

$$\begin{cases} g(x) \geq 0, \\ f(x) = g^2(x). \end{cases}$$

Примеры с решениями

1. Решить уравнение $\sqrt{x^2-8}=\sqrt{-2x}$.

Решение. Уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases} x^2-8=-2x, \\ -2x\ge 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x^2+2x-8=0, \\ x\le 0. \end{cases}$$

Корни квадратного уравнения: -4; 2. Корень иррационального уравнения: -4.

Ответ: -4.

2. Найти сумму корней уравнения

$$\sqrt{3x^2-3x+21}=5-x.$$

Решение. Уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases} 3x^2-3x+21=(5-x)^2, \\ 5-x\ge 0, \end{cases} \quad \begin{cases} 2x^2+7x-4=0, \\ x\le 5, \end{cases} \quad \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=-4 \\ x=0,5, \end{array}\right. \\ x\le 5, \end{cases} \quad \left[\begin{array}{l} x=-4 \\ x=0,5. \end{array}\right.$$

Корни иррационального уравнения: -4; 0,5. Их сумма равна $-3,5$.

Ответ: $-3,5$.

Уравнение $\sqrt{f(x)}=g(x)$ равносильно системе:

$$\begin{cases} g(x)\ge 0, \\ f(x)=g^2(x). \end{cases}$$

Иррациональные уравнения

3. Найти сумму корней уравнения

$$(x+2)\sqrt{x^2-x-20}=6x+12.$$

Решение. Перепишем уравнение в виде:

$$(x+2)\left(\sqrt{x^2-x-20}-6\right)=0.$$

Найдем область допустимых значений переменной: $x^2 - x - 20 \geq 0$, $x \in (-\infty; -4] \cup [5; +\infty)$. Так как произведение равно 0, получим:

$$x+2=0 \text{ или } \sqrt{x^2-x-20}=6,$$

то есть

$$x=-2 \text{ или } x^2-x-20=36.$$

Значение -2 не принадлежит области допустимых значений переменной. Решим последнее уравнение $x^2-x-56=0$: $x=8$ или $x=-7$, оба числа удовлетворяют условию $x^2-x-20\geq 0$. (Это условие можно было бы и не фиксировать, так как $x^2 - x - 20 = 36$.) Сумма корней равна $-7 + 8 = 1$.

Ответ: 1.

Замечание. Вместо нахождения области допустимых значений переменной можно сделать проверку.

Рациональные неравенства

1. Решить неравенство $\frac{x^2+1}{x-3}<0.$

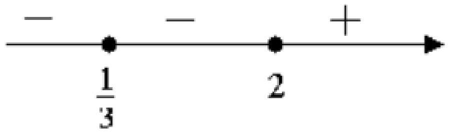
Решение. Функция $f(x)=\frac{x^2+1}{x-3}$ определена при всех действительных значениях x, кроме $x = 3$, и не имеет нулей, поэтому получается: $x \in (-\infty; 3)$.

Ответ: $(-\infty; 3)$.

2. Решить неравенство

$$(9x^2 - 6x + 1)(x - 2) \geq 0.$$

Решение. Преобразуем левую часть неравенства, получим: $(3x - 1)^2(x - 2) \geq 0$. Решим неравенство методом интервалов: $x \in \left\{\frac{1}{3}\right\} \cup [2; +\infty)$.



Ответ: $x=\frac{1}{3},\ x\geq 2.$

3. Решите неравенство:

$$\frac{(x^2+3x-18)(4x^2-4x+1)}{(x^2-5x+6)(3x^2-8x+14)}>0.$$

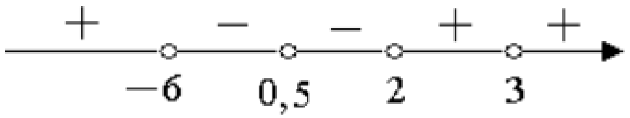
Решение. Разложим на множители числитель и знаменатель левой части неравенства, тогда получим:

$$\frac{(x+6)(x-3)(2x-1)^2}{(x-2)(x-3)(3x^2-8x+14)}>0.$$

Неравенство равносильно системе:

$$\begin{cases} \dfrac{(x+6)(2x-1)^2}{(x-2)(3x^2-8x+14)}>0, \\ x\neq 3. \end{cases}$$

Квадратный трехчлен $3x^2 - 18x + 14$ действительных корней не имеет, то есть принимает значения одного знака при всех допустимых значениях переменной. Решим неравенство методом интервалов: $x \in (-\infty; -6) \cup (2; 3) \cup (3; +\infty)$.



Ответ: $(-\infty; -6) \cup (2; 3) \cup (3; +\infty)$.

Полезные материалы, ресурсы:

- Материалы курса «Система подготовки к ЕГЭ по математике» : лекции 5–8. – М. : Педагогический университет «Первое сентября», 2009. – 80 с.
- Распечатай и реши: Математика ОГЭ 2021 (time4math.ru)
- Открытый банк заданий ОГЭ (fipi.ru)