20.08.2019.

Немного о геометрии…

Часть 1. Знание необходимых фактов и умение их доказывать.

На сайте https://ege-study.ru/materialy-ege/31-poleznyj-fakt-dlya-resheniya-zadach-ege-po-geometrii/

31 полезный факт для решения задач ЕГЭ по геометрии

В задаче 16 ЕГЭ по математике (геометрия) пункт (а) – доказательство. Вот некоторые полезные факты, которые надо знать и уметь доказывать. Любой из них может быть опорным «пунктом» в доказательстве задачи ЕГЭ №16. Доказательство таких полезных фактов – первый этап в освоении геометрии.

Углы, треугольники, четырехугольники

1. Биссектрисы смежных углов перпендикулярны.
2. Медиана прямоугольного треугольника, проведенная к гипотенузе, равна половине гипотенузы.
3. Медианы треугольника пересекаются в одной точке и делятся в ней в отношении 2:1, считая от вершины.
4. Сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов всех его сторон.
5. Площадь любого четырехугольника равна половине произведения диагоналей на синус угла между ними.
6. Отрезок, соединяющий середины диагоналей трапеции, равен полуразности оснований.
7. Проекция боковой стороны равнобедренной трапеции на основание равна полуразности оснований, а проекция диагонали – полусумме оснований.
8. Замечательное свойство трапеции. Точка пересечения диагоналей трапеции, точка пересечения продолжений ее боковых сторон и середины оснований лежат на одной линии.

Окружности

9. Диаметр, перпендикулярный хорде, делит ее пополам.
10. Произведения отрезков пересекающихся хорд окружности равны.
11. Серединный перпендикуляр к хорде проходит через центр окружности.
12. Равные хорды удалены от центра окружности на равные расстояния.
13. Дуги окружности, заключенные между параллельными хордами, равны.
14. Теорема о касательной и секущей. Если из одной точки к окружности проведены секущая и касательная, то произведение всей секущей на ее внешнюю часть равно квадрату отрезка касательной.
15. Угол между касательной и хордой, проведенной через точку касания, равен половине угловой величины дуги, заключенной между ними.
16. Угол между пересекающимися хордами равен полусумме противоположных дуг, высекаемых хордами.

17. Угол между двумя секущими равен полуразности дуг, высекаемых секущими на окружности.
18. Радиус окружности, вписанной в прямоугольный треугольник с катетами a и b и гипотенузой c, равен $\frac{1}{2}(a+b-c)$.
19. Прямая, проходящая через точки пересечения двух окружностей, делит пополам общую касательную к ним.
20. Если расстояние между центрами окружностей радиусами R и r равно a и $a > R+r$, то отрезки общих внешних и общих внутренних касательных, заключенные между точками касания, равны соответственно $\sqrt{a^2-(R-r)^2}$ и $\sqrt{a^2-(R+r)^2}$
21. Если четырехугольник можно вписать в окружность, то сумма его противоположных углов равна 180 градусов.
22. Если в четырехугольник можно вписать окружность, то суммы длин его противоположных сторон равны.
23. Если окружность вписана в равнобедренную трапецию, то боковая сторона трапеции равна ее средней линии.
24. Геометрическое место точек M, из которых отрезок AB виден под прямым углом (угол $AMB = 90°$), есть окружность с диаметром AB без точек A и B.
25. Геометрическое место точек M, из которых отрезок AB виден под данным углом, есть две дуги равных окружностей с общей хордой AB, без точек A и B.
26. Если M – точка касания со стороной AC окружности, вписанной в треугольник ABC, то $AM = p - BC$, где p – полупериметр треугольника ABC.
27. Если окружность касается стороны BC треугольника ABC и продолжений сторон AB и AC, то расстояние от вершины A до точки касания окружности с прямой AB равно полупериметру треугольника ABC.
28. Если окружность, вписанная в треугольник ABC, касается сторон AB, BC и AC соответственно в точках $K, L, M,$ а угол $BAC = \varphi$, то угол $KLM = 90° - \frac{1}{2}\varphi$
29. Если прямые, проходящие через точку A, касаются окружности S в точках B и C, то центр вписанной окружности треугольника ABC лежит на окружности S.
30. Если AM и CK – высоты треугольника ABC, то треугольник MBK подобен треугольнику ABC, причем коэффициент подобия равен $|\cos B|$.
31. Если площадь треугольника равна S, то площадь треугольника, составленного из его медиан, равна $\frac{3}{4}S$.

Доказывайте полезные факты! Запоминайте картинки и схемы решения.
Чем больше у вас таких ассоциативных связей – тем проще решаются задачи по геометрии.
При составлении списка полезных фактов использованы учебные пособия Р. К. Гордина (там их немного больше ☺).

Часть 2. Применение доказанных фактов к решению задач и доказательство новых «между делом…»

2.1. Факт. Если *AM* и *CK* – высоты треугольника *ABC*, то треугольник *MBK* подобен треугольнику *ABC*, причем коэффициент подобия равен $|\cos B|$.

Задача. В остроугольном треугольнике угол A равен 60°. Высоты BN и CM треугольника пересекаются в точке H. Точка O – центр окружности, описанной около треугольника ABC.

а) докажите, что AH = AO.

б) найдите площадь треугольника AHO, если BC = $\sqrt{21}$, $\angle ABC = 37{,}5°$.

Вопрос. На какой интересный факт мы «наткнулись» в процессе решения пункта б)?

2.2. Факт. Медианы треугольника пересекаются в одной точке и делятся в ней в отношении 2:1, считая от вершины.

Задача 1. Точка *M* пересечения медиан треугольника *ABC*, вершина *A* и середины сторон *AB* и *AC* лежат на одной окружности.

а) Докажите, что треугольники *AKB* и *BKM* подобны, где *K* – середина стороны *BC*.

б) Найдите длину *AK*, если *BC* = $6\sqrt{3}$.

Задача 2. На стороне *AC* треугольника *ABC* во внешнюю сторону построен параллелограмм *ACDE*. Пусть *O* — точка пересечения его диагоналей, *N* и *K* — середины сторон *BC* и *BA* соответственно. Докажите, что прямые *DK*, *EN* и *BO* пересекаются в одной точке.

2.3. Факт 1. Медиана треугольника разбивает треугольник на два равновеликих.

Факт 2. Три медианы разбивают треугольник на шесть равновеликих.

Факт 3. Если площадь треугольника равна S, то площадь треугольника, составленного из его медиан, равна $\frac{3}{4}S$.

Часть 3. Некоторые полезные ресурсы.

1. Геометрическая олимпиада «ФМШ» https://fmschool72.ru/uchashchimsya/geometrical-olympiad/
2. Устные математические олимпиады http://olympiads.mccme.ru/ustn/
3. Олимпиада им. И.Ф. Шарыгина http://geometry.ru/olimp/olimpsharygin.php
4. Информационно-поисковая система «Задачи по геометрии» http://zadachi.mccme.ru/2012/#&page1
5. Каталог задач http://www.problems.ru/
6. Сириус. Образовательные программы. Дистанционное обучение. Дополнительные главы по геометрии 7-9 класс https://sochisirius.ru/obuchenie/distant

Часть 4. Олимпиады ГАОУ ТО «ФМШ».

Олимпиада школьников для 4-6 классов.
1 –й тур 14 сентября. Регистрация будет открыта через неделю.
2 – й тур 14 марта. Между турами будет организованы семинары для учащихся.