Теория вероятности.
Задания № 3 и № 4
ЕГЭ-2023

Попова Елена Юрьевна,
учитель математики
МАОУ СОШ № 5
города Тюмени

Задание № 2 (ЕГЭ-2022)

Задание 2. Простейшая задача по теории вероятностей на подсчёт доли благоприятствующих элементарных событий.

Пример 1

В чемпионате по гимнастике участвуют 45 спортсменок: 6 из России, 21 из США, остальные — из Китая. Порядок, в котором выступают гимнастки, определяется жребием. Найдите вероятность того, что спортсменка, выступающая первой, окажется из Китая.

Пример 2

На конференцию приехали учёные из трёх стран: 5 из Австрии, 4 из Германии и 6 из Сербии. Каждый из них делает на конференции один доклад. Порядок докладов определяется жеребьёвкой. Найдите вероятность того, что десятым окажется доклад учёного из Сербии.

Комментарий

Задания выполнило около 90 % участников экзамена, что говорит о успешном освоении базовых навыков анализа простейших вероятностных моделей. Однако процент выполнения задания из примера 2 ниже, вероятно, объясняется тем, что в примере 1 речь идет о *первой* спортсменке, а в примере 2 – о *десятом* докладе. Здесь явно недоработка учителей, которые не стали объяснять, что неважно, о каком именно по счёту объекте идёт речь. Нужно лишь найти долю объектов, удовлетворяющих нужному условию (спортсменка из Китая или доклад из Сербии).

Задание № 10 (ЕГЭ-2022)

Задание 10. Теория вероятностей.

Пример

Стрелок стреляет по одному разу в каждую из четырёх мишеней. Вероятность попадания в мишень при каждом отдельном выстреле равна 0,6. Найдите вероятность того, что стрелок попадёт в две первые мишени и не попадёт в две последние.

Комментарий

Задание выполняет более двух третей участников экзамена. Задачи по теории вероятностей, отличные от задач на простой подсчёт отношений, впервые вошли в ЕГЭ, хотя уже несколько лет соответствующие темы содержатся в примерных общеобразовательных программах. Выполнение задач этого типа на показанном уровне хорошо для группы задач, впервые вошедших в варианты экзамена. Основные причины неуспешного выполнения этих задач – неустойчивые вычислительные навыки и непонимание вероятностной сути задачи.

Статистический анализ выполнения заданий КИМ в 2022 году
(по результатам государственной итоговой аттестации в 2022 году в Тюменской области)

Номер задания в КИМ 2022	Проверяемые элементы содержания / умения	Уровень сложности задания	Процент выполнения задания в субъекте Российской Федерации[11]				
			средний	в группе не преодолевших минимальный балл	в группе от минимального до 60 т.б.	в группе от 61 до 80 т.б.	в группе от 81 до 100 т.б.
2.	Уметь строить и исследовать простейшие математические модели.	Б	91,9	37,3	90,6	96,6	98,5
10.	Уметь использовать приобретённые знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни.	П	53,4	18,2	35,6	72,2	82,8

Демоверсия ЕГЭ – 2023 задание № 3

3 В сборнике билетов по биологии всего 25 билетов. Только в двух билетах встречается вопрос о грибах. На экзамене выпускнику достаётся один случайно выбранный билет из этого сборника. Найдите вероятность того, что в этом билете будет вопрос о грибах.

Ответ: ___________________________.

ИЛИ

Вероятность того, что мотор холодильника прослужит более 1 года, равна 0,8, а вероятность того, что он прослужит более 2 лет, равна 0,6. Какова вероятность того, что мотор прослужит более 1 года, но не более 2 лет?

Ответ: ___________________________.

Демоверсия ЕГЭ – 2023 задание № 4

4 Симметричную игральную кость бросили 3 раза. Известно, что в сумме выпало 6 очков. Какова вероятность события «хотя бы раз выпало 3 очка»?

Ответ: ___________________________.

ИЛИ

В городе 48 % взрослого населения – мужчины. Пенсионеры составляют 12,6 % взрослого населения, причём доля пенсионеров среди женщин равна 15 %. Для социологического опроса выбран случайным образом мужчина, проживающий в этом городе. Найдите вероятность события «выбранный мужчина является пенсионером».

Ответ: ___________________________.

Теория к заданию №3

классическое определение вероятности события

определение противоположного события

формулы для определения вероятности противоположного события

Теория к заданию №4

понятия несовместных и независимых событий, объединения и пересечения событий

формулы вероятности объединения несовместных и пересечения независимых событий, формула вероятности объединения произвольных событий.

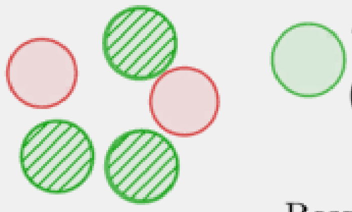
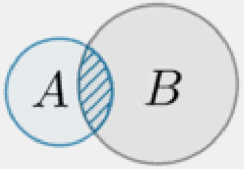
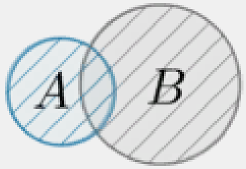
понятие условной вероятности события, формула Байеса

понятие полной совокупности событий, формула полной вероятности

основные понятия комбинаторики, формулы комбинаторики, схема Бернулли, математическое ожидание

Общая памятка по всем разделам теории вероятностей

НАЙТИ ВЕРОЯТНОСТЬ ЗАШТРИХОВАННОЙ ОБЛАСТИ

Равновероятные события	 "подходящие" события (m событий) Всего возможно N исходов	$P = \dfrac{m}{N}$
Сумма несовместных событий	 A или B	$P(A) + P(B)$
Произведение совместных событий	 A и B	$P(A) \cdot P(B)$
Сумма совместных (и независимых) событий	 A или B	$P(A) + P(B) - P(A \text{ и } B) =$ $P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B)$

Определение вероятности

вероятность — это отношение благоприятных событий ко всем возможным событиям в одном испытании

Формула работает для **равновероятностных** событий

формула вероятности

$$P = \frac{m}{n}$$

m — благоприятные

n — все

Фабрика выпускает сумки. В среднем на 100 качественных сумок приходится восемь сумок со скрытыми дефектами. Найдите вероятность того, что купленная сумка окажется качественной. Результат округлите до сотых.

Решение.

Переформулируем задачу.
Из 108 сумок, выпущенных фабрикой, в среднем, восемь сумок со скрытыми дефектами и 100 качественных.
Событие А - купленная сумка окажется качественной.
Число благоприятствующих этому событию исходов k=100. Всего же исходов n=108.

$$p(A) = \frac{100}{108} = \frac{25}{27} \approx 0{,}925 \approx 0{,}93.$$

Сравните условия задач

Фабрика выпускает сумки. В среднем **из 100 сумок восемь сумок со скрытыми дефектами**. Найдите вероятность того, что купленная сумка окажется качественной. Результат округлите до сотых.

Решение.

$$\frac{92}{100} = 0{,}92.$$

Ответ: 0,92.

Фабрика выпускает сумки. В среднем **на 100 качественных сумок приходится восемь сумок со скрытыми дефектами**. Найдите вероятность того, что купленная сумка окажется качественной. Результат округлите до сотых.

Решение.

$$\frac{100}{100+8} = \frac{100}{108} = \frac{25}{27} = 0{,}925\ldots \approx 0{,}93.$$

Ответ: 0,93.

Общая схема решения задач

Решая такие задачи, нужно придерживаться общей схемы.

1. Определить, в чем состоит **случайный эксперимент и какие у него элементарные события (исходы)**. Убедиться, что они равновозможны.

2. Найти **общее число элементарных событий** N.

3. Определить, какие элементарные события благоприятствуют интересующему нас событию A, и **найти их число** $N(A)$. (Событие можно обозначить любой буквой.)

4. **Найти вероятность** события A по формуле $\mathrm{P}(A) = \frac{N(A)}{N}$.

подряд бросаем монетку, выпадение орла или решки в разных испытаниях — независимые

один раз бросаем кубик, выпадение разных граней в одном испытаниях — несовместные

Если шахматист А. играет белыми фигурами, то он выигрывает у шахматиста Б. с вероятностью 0,5. Если А. играет черными, то А. выигрывает у Б. с вероятностью о,3. А. и Б. играют две партии, причем во второй партии меняют цвет фигур. Найдите вероятность того, что А. выиграет оба раза.

Вероятность того, что происходит несколько независимых событий, равна произведению вероятностей.

Решение.

Возможность выиграть первую и вторую партию не зависят друг от друга. Вероятность произведения независимых событий равна произведению их вероятностей: $0{,}5 \cdot 0{,}3 = 0{,}15$. Ответ: 0,15.

независимые события

независимые события — такие события из разных испытаний, для которых наступление одного из них не изменяет вероятность наступления другого

формула произведения независимых событий

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B)$$

$$A \parallel B = A \cdot B$$

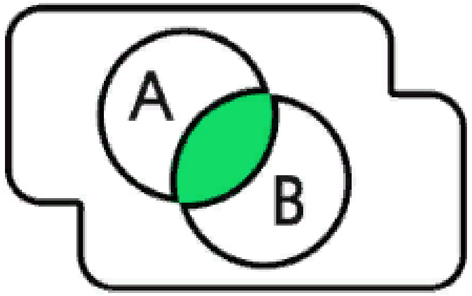
пример вероятность выпадения орла 2 раза подряд

$$P_о = \frac{1}{2}$$

$$P_{оо} = P_о \cdot P_о = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$P_{оо} = 0{,}25$$

зависимые события

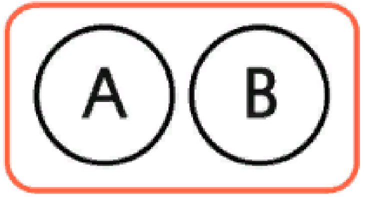


зависимые события — такие события из разных испытаний, для которых наступление одного из них изменяет вероятность наступления другого

формула произведения зависимых событий

$$P(AB) = P(A) \cdot P_a(B)$$

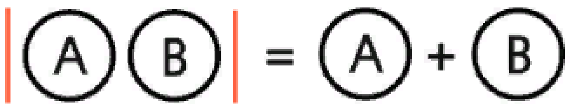
несовместные события



несовместные события — это такие события из одного испытания, которые не могут произойти одновременно.

формула суммы несовместных событий

$$P(A+B) = P(A) + P(B)$$

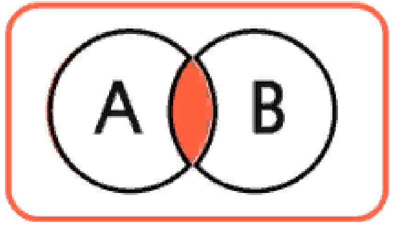


пример вероятность выпадения числа, кратного 3, для броска кубика, округленная до сотых

$$\left.\begin{array}{l} P_3 = \frac{1}{6} \\ P_6 = \frac{1}{6} \end{array}\right\} \quad P_{3+6} = P_3 + P_6 = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$P_{3+6} = 0{,}33$$

совместные события



совместные события — такие события из одного испытания, которые могут произойти одновременно.

формула суммы совместных событий

$$P[A+B] = P[A] + P[B] - P[AB]$$

пример вероятность выпадения числа, кратного 3 или 2, для 1-ого броска кубика, округленная до сотых

$$P_{36}=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{1}{3}$$

$$P_{246}=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{1}{2}$$

$P_{36+246}=P_{36}+P_{246}-P_{36246}$, где $P_{36246}=P_{36}\cdot P_{246}$

$$P_{36+246}=\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$$

$$P_{36+246}=0{,}67$$

Схема Бернулли

Пусть проводится серия из *n* идентичных независимых экспериментов. В каждом из них вероятность события А равна *p*. Тогда вероятность того, что в указанной серии экспериментов событие наступит ровно *k* раз ($k \leq n$), вычисляется по формуле

$$C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$$

Формула Байеса:

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)\,P(A)}{P(B)}$$

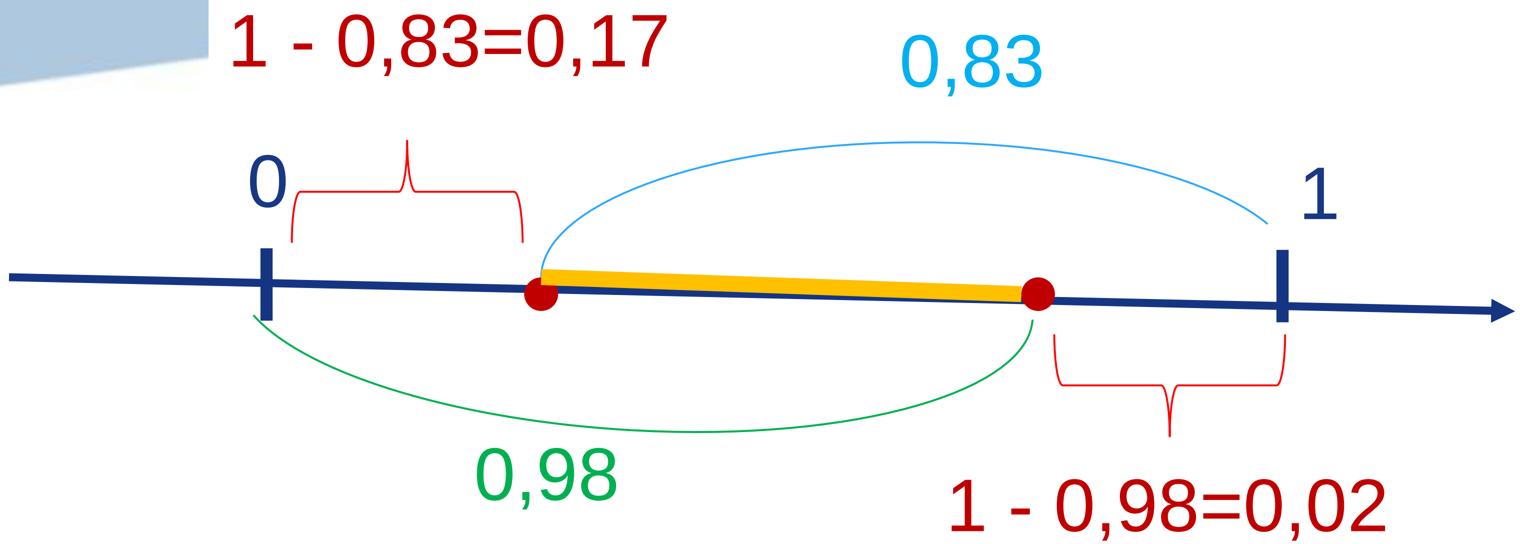
где
P(A) — априорная вероятность гипотезы A (т.е. безусловная вероятность, которая присваивается до того, как будут приняты во внимание какие-либо соответствующие доказательства) ;
P(A | B) — вероятность гипотезы A при наступлении события B (апостериорная вероятность);
P(B | A) — вероятность наступления события B при истинности гипотезы A;
P(B) — вероятность наступления события B.

При выпечке хлеба производится контрольное взвешивание свежей буханки. Известно, что вероятность того, что масса окажется меньше 810 г, равна 0,98. Вероятность того, что масса окажется больше 790 г, равна 0,83. Найдите вероятность того, что масса буханки больше 790 г, но меньше 810 г.

Нарисуем **координатную прямую**, отметив на ней массу буханки хлеба в граммах с соответствующими **вероятностями**:

Масса **меньше 810** г = **0,98**

Масса **больше 790** г = **0,83**



Значит, вероятность того, что вес буханки будет в пределах от 790 г до 810 г равна 1 - 0,17 – 0,02=0,81

Первый игральный кубик обычный, а на гранях второго кубика нет четных чисел, а нечетные числа встречаются по два раза. В остальном кубики одинаковые. Один случайно выбранный кубик бросают два раза. Известно, что в каком-то порядке выпали 3 и 5 очков. Какова вероятность, что бросали второй кубик?

При броске **обычного игрального кубика** могут **выпасть числа** от **1** до **6**.

При бросании **первого обычного кубика вероятность** того, что выпадут **3 и 5 очков ИЛИ 5 и 3 очка** равна:

$$\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$$

На **втором кубике по две грани с числами 3 и 5**, соответственно **вероятность**, что выпадут **3 и 5 очков ИЛИ 5 и 3 очка** равна:

$$\frac{2}{6} \cdot \frac{2}{6} + \frac{2}{6} \cdot \frac{2}{6} = \frac{8}{36} = \frac{2}{9}$$

Заметим, что **вероятность выпадения** при бросании **второго кубика в 4 раза больше, чем** при бросании **первого**:

$$\frac{\frac{2}{9}}{\frac{1}{18}} = \frac{2}{9} \cdot \frac{18}{1} = \frac{2 \cdot 2}{1} = \frac{4}{1} = 4 \text{ раза}$$

Значит **вероятности относятся** как **4:1** (*второй кубик* **:** *первый кубик*). **Всего частей** 4 + 1 = **5** из них **4 части вероятности** выпадения **второго кубика**.

Вероятность того, что **бросали второй кубик** равна:

$$\frac{4}{5} = 0,8$$

Маша коллекционирует принцесс из Киндер-сюрпризов. Всего в коллекции 10 разных принцесс, и они равномерно распределены, то есть в каждом Киндер-сюрпризе может с равными вероятностями оказаться любая из 10 принцесс. У Маши есть две разные принцессы из коллекции. Какова вероятность того, что для получения следующей принцессы Маше придется купить еще 2 или 3 шоколадных яйца?

В коллекции **10 разных принцесс**, **вероятность выпадения 1-й** из них:

$$\frac{1}{10} = 0,1$$

У Маши уже **есть 2 разные** (*старые*) **принцессы**, а **8 других** (*новые*) принцесс **нету**.

Вероятность выпадения старой принцессы:

$$2 \cdot 0,1 = \mathbf{0,2}$$

Вероятность выпадения новой принцессы:

$$8 \cdot 0,1 = \mathbf{0,8}$$

Вероятность того, что для **получения новой принцессы** придётся купить **2** шоколадных **яйца**:

старая новая = **0,2·0,8** = **0,16**

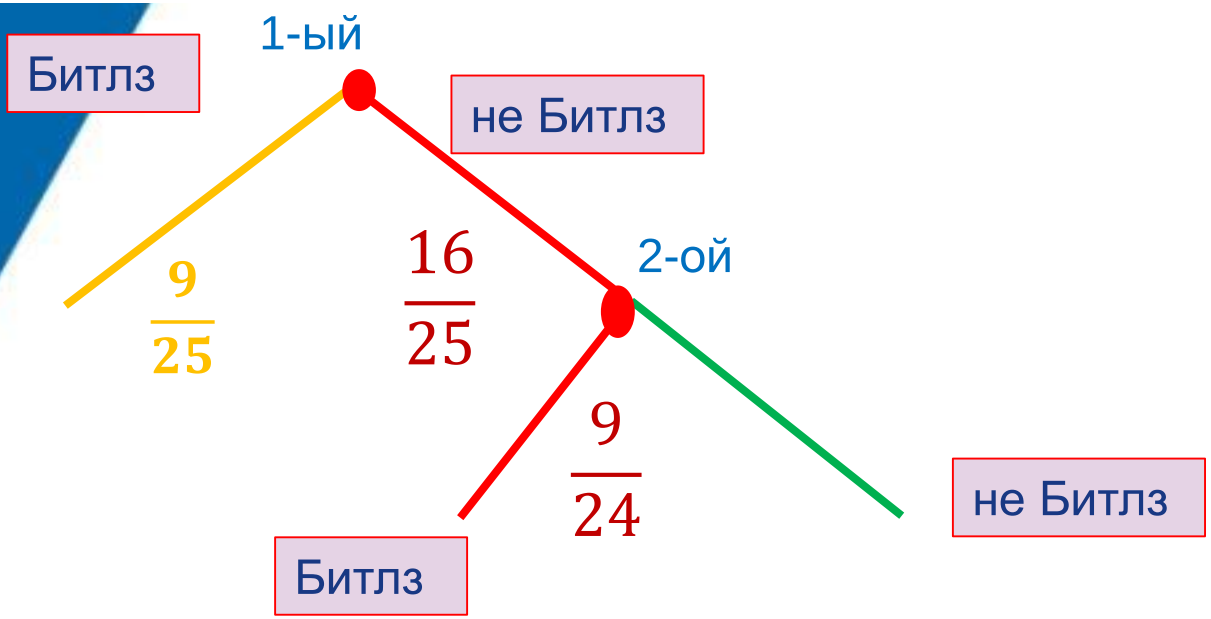
Вероятность того, что для **получения новой принцессы** придётся купить **3** шоколадных **яйца**:

старая старая новая = **0,2·0,2·0,8** = **0,032**

Вероятность того, что придётся **купить 2 ИЛИ 3** шоколадных **яйца**:

0,16 + 0,032 = **0,192**

Плейлист айпода содержит **25** треков, из которых **9** исполняет группа Битлз. Функция **«shuffle»** воспроизводит все треки в случайном порядке, каждый по одному разу. Какова вероятность того, что трек Битлз будет играть вторым, причем первым будет воспроизведен трек другого исполнителя**?**

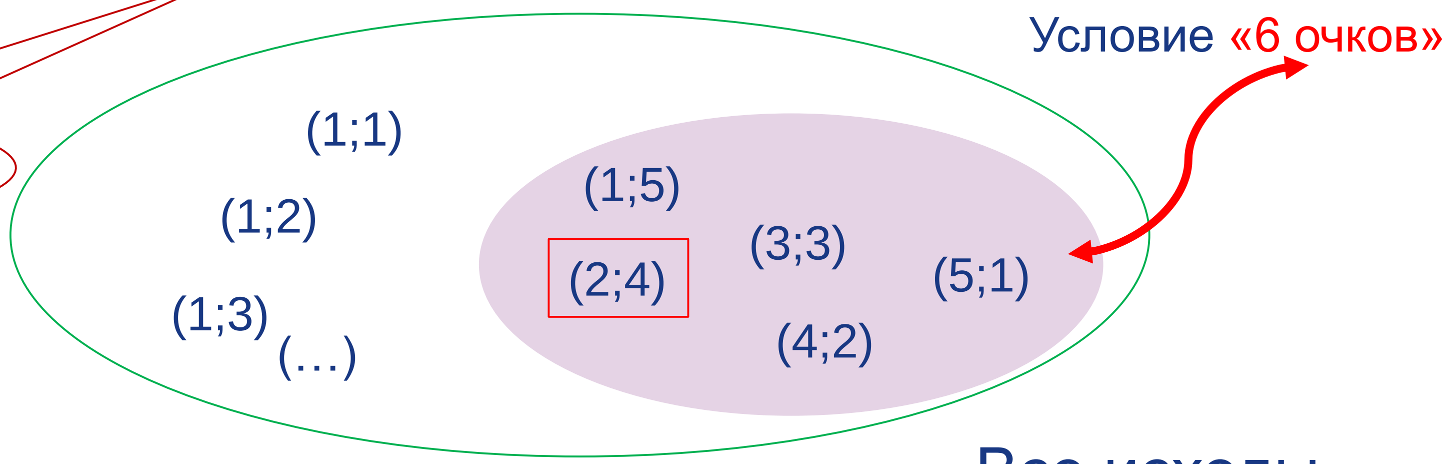


По теореме об умножении вероятностей

$$\frac{16}{25}\cdot\frac{9}{24}=\frac{6}{25}=0{,}24$$

Игральный кубик бросают дважды. Известно, что в сумме выпало **6** очков. Найдите вероятность того, что в первый раз выпало **2** очка.

Условная вероятность

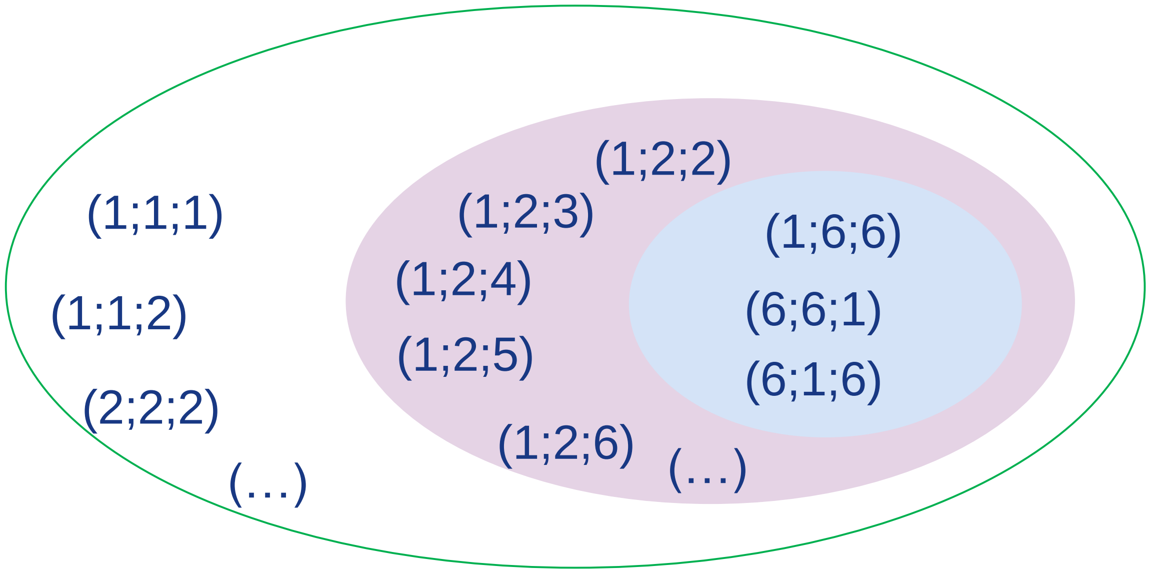


$P = 1/5 = 0{,}2$

Все исходы равновероятностные, их пять, и только один благоприятный

Игральный кубик бросают три раза. Найдите вероятность того, что в сумме выпало **13** очков, при условии, что единица выпала ровно один раз.

Условная вероятность



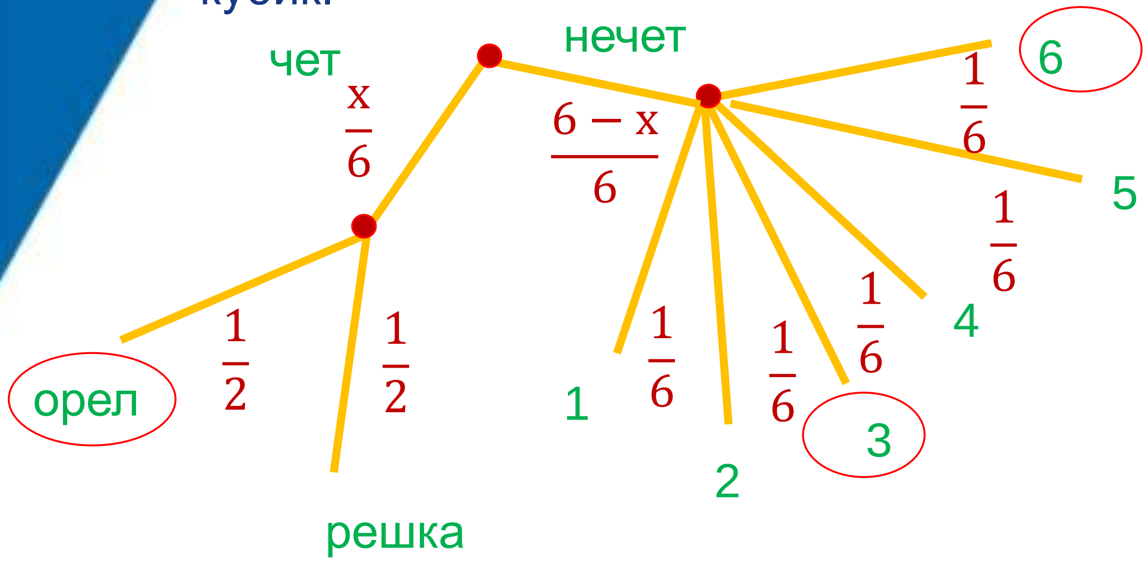
Всего исходов
6х6х6=216
Исходов, в которых
один раз
встречается единица
5х5х3=75
Исходов, в которых
сумма 13, всего 3.

Имеем 3/75 = 1/25 = 0,04

Есть странный шестигранный игральный кубик, на гранях которого написаны какие-то натуральные числа, причем среди них ровно **x** четных. Реализуется следующий эксперимент: сначала совершают бросок странного кубика; затем, если на странном кубике выпало четное число, подбрасывают симметричную монетку, если же выпало нечетное число, подбрасывают стандартный игральный кубик с числами от **1** до **6** на гранях. Известно, что вероятность того, что во втором броске выпал орел, либо тройка, либо шестерка, равна **7/18** . Сколько четных чисел было написано на странном игральном кубике?

Есть странный шестигранный игральный кубик, на гранях которого написаны какие-то натуральные числа, причем среди них ровно **x** четных. Реализуется следующий эксперимент: сначала совершают бросок странного кубика; затем, если на странном кубике выпало четное число, подбрасывают симметричную монетку, если же выпало нечетное число, подбрасывают стандартный игральный кубик с числами от **1** до **6** на гранях. Известно, что вероятность того, что во втором броске выпал орел, либо тройка, либо шестерка, равна **7/18** . Сколько четных чисел было написано на странном игральном кубике?

Пусть x – количество четных чисел, тогда (6 – x) - количество нечетных чисел. Бросаем кубик.



$$\frac{x}{6}\cdot\frac{1}{2}+\frac{6-x}{6}\cdot\frac{1}{6}+\frac{6-x}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{7}{18}$$

$$3x + 6 – x + 6 – x = 14$$

$$x = 2$$

В торговом центре есть три одинаковых кофейных автомата. Вероятность того, что к концу дня в кофейном автомате закончится кофе, равна 0,3. Вероятность того, что к концу дня кофе закончится во всех трех кофейных автоматах, равна 0,05. Какова вероятность того, что к концу дня в торговом центре еще можно выпить кофе, но в первом автомате весь кофе закончился?

У каждого автомата есть два исхода: кофе в нем закончился (будем обозначать «− »), и кофе в нем остался (будем обозначать «+ »). По условию вероятность того, что в первом автомате кофе закончился, равна 0,3 . Заметим, что в событие «в первом автомате закончился кофе» входят элементарные исходы, когда во втором и в третьем автоматах тоже нет кофе (− ,− ,−) , когда во втором и третьем автоматах есть кофе (− ,+, +) и когда только в одном из них остался кофе (− ,+,−) и (− ,− ,+) . Также по условию вероятность того, что во всех автоматах нет кофе (− ,− ,−) равна 0,05 . Тогда вероятность того, что в первом автомате кофе закончился, а во втором или в третьем еще есть кофе (то есть вероятность события {(− ,+,+);(− ,− ,+);(− ,+,−)}), равна разности 0,3− 0,05 = 0,25

Игральную кость бросают до тех пор, пока сумма всех выпавших очков не превысит число 3. Какова вероятность того, что для этого потребуется ровно 3 броска? Ответ округлите до сотых.

Решение:

Итак, как получилось, что ровно за 3 броска игральной кости сумма выпавших очков оказалась больше трех? Из этого следует, что за 2 броска сумма выпавших очков была меньше 3 или равна 3.

Если за 2 броска сумма выпавших очков была меньше 3, значит, она была равна 2, то есть первый раз выпала единица и второй раз тоже единица. Вероятность этого события равна $\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$.

Сколько же очков в этом случае должен дать третий бросок? Очевидно, что подойдет 2, 3, 4, 5, 6 – все, кроме 1.

Вероятность того, что при третьем броске выпадет число очков, не равное единице, равна $\frac{5}{6}$. Значит, вероятность того, что при первых двух бросках выпали единицы, а при третьем – не единица, равна $\frac{5}{216}$.

Рассмотрим также случай, когда сумма очков за первые 2 броска равна 3. Это значит, что выпали 2 и 1 или 1 и 2, то есть 2 благоприятных исхода из 36 возможных. Вероятность этого события равна $\frac{2}{36} = \frac{1}{18}$.

При этом нам все равно, что выпадет при третьем броске: очевидно, что сумма очков при трех бросках будет больше трех.

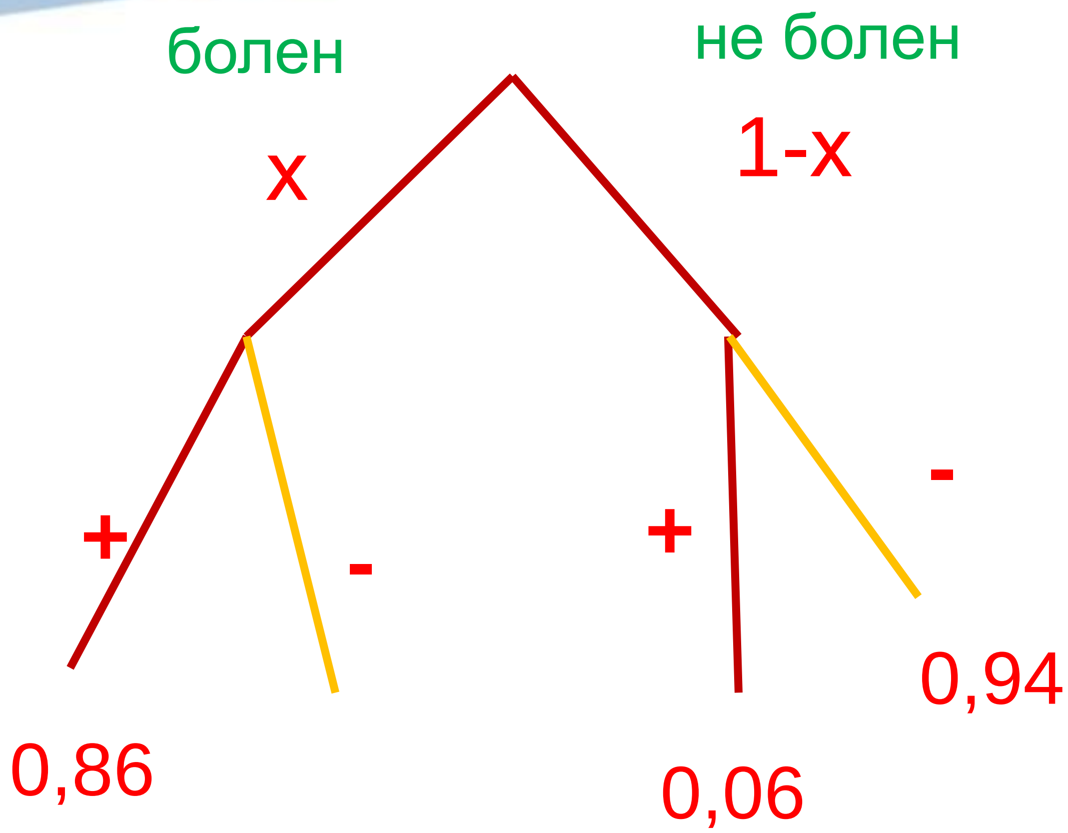
Окончательно получаем $\frac{5}{216} + \frac{1}{18} = \frac{17}{216} \approx 0,08$

При подозрении на наличие некоторого заболевания пациента отправляют на ПЦР-тест. Если заболевание действительно есть, то тест подтверждает его в 86% случаев. Если заболевания нет, то тест выявляет отсутствие заболевания в среднем в 94% случаев. Известно, что в среднем тест оказывается положительным у 10% пациентов, направленных на тестирование.

При обследовании некоторого пациента врач направил его на ПЦР-тест, который оказался положительным. Какова вероятность того, что пациент действительно имеет это заболевание?

*При подозрение на наличие некоторого заболевания пациента отправляют на ПЦР-тест. Если заболевание действительно есть, то тест подтверждает его в **86 %** случаев. Если заболевания нет, то тест выявляет отсутствие заболевания в среднем в **94%** случаев.*
*Известно, что в среднем тест оказывается положительным у **10%** пациентов, направленных на тестирование. При обследовании некоторого пациента врач направил его на ПЦР-тест, который оказался положительным. Какова вероятность того, что пациент действительно имеет это заболевание?*

Уточним условие: "Какова вероятность того, что пациент, ПЦР-тест которого положителен, действительно имеет это заболевание?". В такой формулировке множество возможных исходов - это число пациентов с положительным результатом ПЦР-теста, причем только часть из них действительно заболевшие.
Пациент приходит к врачу и делает ПЦР-тест. Он может быть болен этим заболеванием – с вероятностью x. Тогда с вероятностью 1 – x он этим заболеванием не болен.
Анализ пациента может быть положительным по двум причинам:
а) пациент болеет заболеванием, которое нельзя называть, его анализ верен; событие A;
б) пациент не болен этим заболеванием, его анализ ложно-положительный, событие B.
Это несовместные события, и вероятность их суммы равна сумме вероятностей этих событий.



$$0,86x + 0,06(1 - x) = 0,1.$$

$$P(A) = 0,86x;$$

$$P(B) = 0,06 \cdot (1 - x);$$

$$P(A + B) = P(A) + P(B) = 0,86x + 0,06(1 - x) = 0,1.$$

Мы составили уравнение, решив которое, найдем вероятность x.

$$x = 0,05.$$

Что такое вероятность x? Это вероятность того, что пациент, пришедший к доктору, действительно болен. Здесь множество возможных исходов - это количество всех пациентов, пришедших к доктору.

Нам же нужно найти вероятность z того, что пациент, ПЦР-тест которого положителен, действительно имеет это заболевание. Вероятность этого события равна $0,05 \cdot 0,86$ (пациент болен и ПЦР-тест выявил заболевание, произведение событий). С другой стороны, эта вероятность равна $0,1 \cdot z$ (у пациента положительный результат ПЦР-теста, и при выполнении этого условия он действительно болен).

Получим: $0,05 \cdot 0,86 = 0,1 \cdot z$ отсюда $z = 0,43.$

Пусть x — число больных пациентов и y — число здоровых. Тогда всего имеется $x+y$ пациентов.

Общее число положительных ПЦР-тестов по условию равно $0{,}1(x+y)$, из которых $0{,}86x$ тестов приходится на больных пациентов и $0{,}06y$ тестов — на здоровых. Тогда

$$0,1(x+y)=0,86x+0,06y \Leftrightarrow y=19x.$$

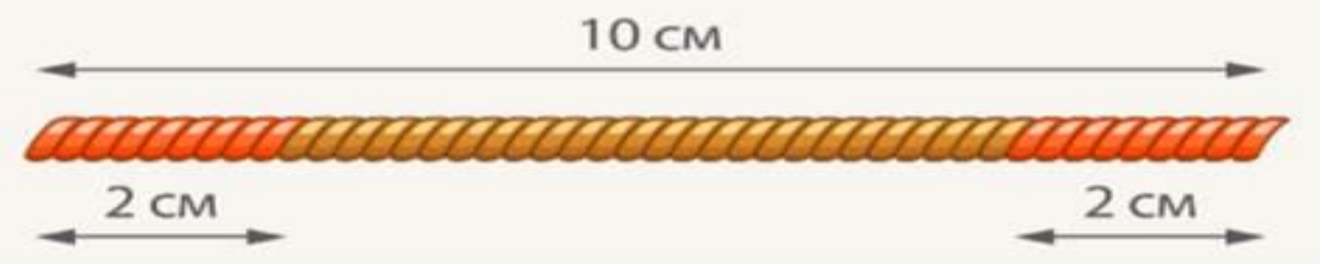
Поэтому вероятность того, что положительный ПЦР-тест был взят у больного пациента, равна

$$\frac{0,86x}{0,1(x+19x)}=\frac{0,86x}{2x}=0,43.$$

Из озера выловили 86 рыб, которых пометили и отпустили обратно в озеро. Через неделю произвели повторный отлов, на этот раз поймали 78 рыб, среди которых оказалось 6 помеченных. Сколько приблизительно рыб живет в озере?

- Оказывается, найти ответ на этот неожиданный вопрос совсем несложно.
- В самом деле: обозначим неизвестную нам численность рыб в озере через N.
- Тогда вероятность поймать помеченную рыбу в озере будет 86/N.
- С другой стороны, эта вероятность должна приближенно равняться полученной во втором улове частоте: 86/N=6/78.
- Отсюда $N = 86 \cdot 78 / 6 = 1118$.

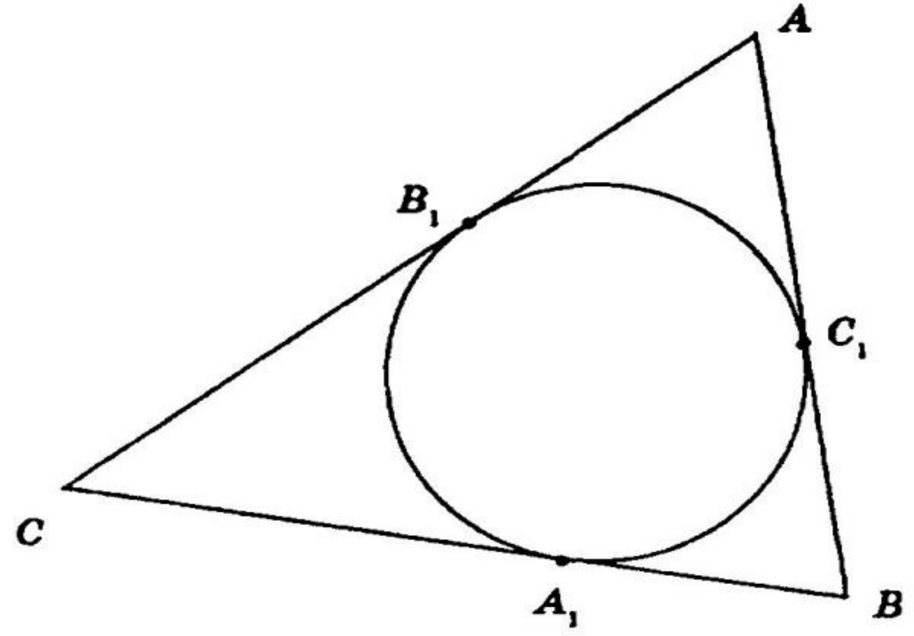
Дана нитка длиной 10 см. Нитка порвалась в случайном месте. Какова вероятность того, что после обрыва имеется часть нитки длиной не менее 8 см?



благоприятные исходы – это объединение двух множеств, отмеченных красным цветом на рисунке, то есть множество меры 4 см. Исходное множество имеет меру (длину) 10 см, поэтому вероятность того, что после обрыва имеется часть нитки длиной не менее 8 см равна:

$$p = \frac{4}{10} = 0{,}4$$

В треугольник со сторонами $a=9$, $b=13$, $c=16$ вписан круг. Точка М произвольно ставится в треугольник. Найти вероятность того, что точка попадёт в круг.



;

В треугольник со сторонами a=9, b=13, c=16 вписан круг. Точка М произвольно ставится в треугольник. Найти вероятность того, что точка попадёт в круг.

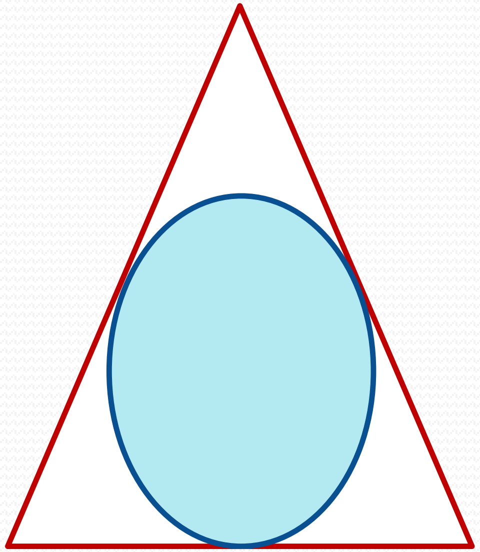
- Поскольку точка ставится в треугольник, а круг лежит внутри, то общему числу исходов соответствует площадь треугольника, а множеству благоприятствующих исходов – площадь вписанного круга.

$$S_т = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \qquad S_т = 6\sqrt{95}\text{ ед}^2$$

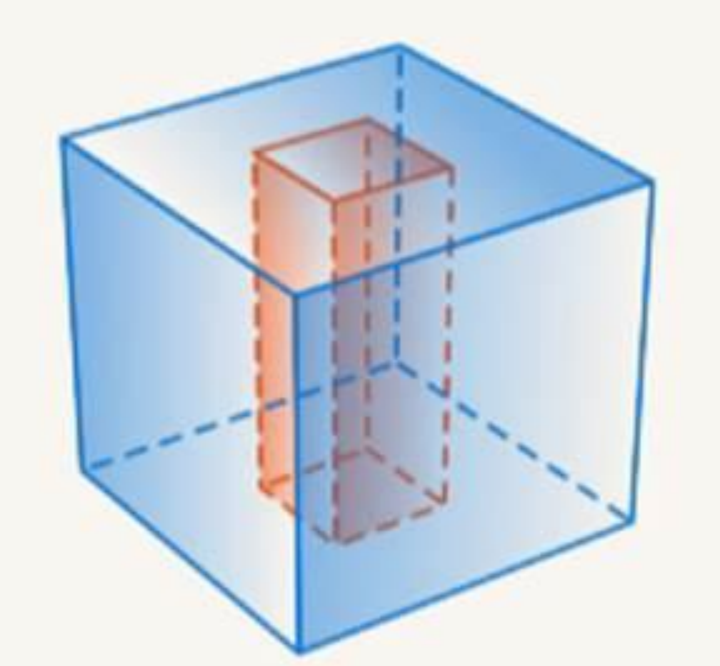
$$S_к = \pi R^2 \quad \text{где} \quad R = \frac{S_т}{p} \qquad S_к = \frac{180\pi}{19}\text{ ед}^2$$

И тогда искомая вероятность:

$$P = \frac{S_к}{S_т} = \frac{\frac{180\pi}{19}\text{ ед}^2}{6\sqrt{95}\text{ ед}^2} \approx 0{,}51$$



Комар находится в закрытой кубической комнате со стороной 3 м. В течение некоторого времени он свободно летает по комнате, после чего он может равновероятно оказаться в любой точке комнате. Какова вероятность того, что через час он будет находиться на расстоянии не более метра от стены? Ответ округлите до сотых.



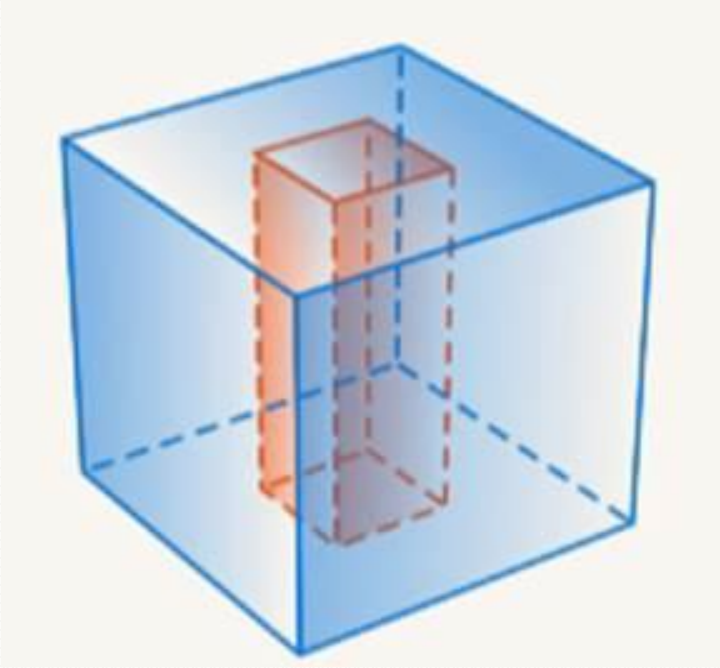
Благоприятные исходы – это когда комар находится на расстоянии не более метра от какой-либо стены. Нам дан куб со стороной 3 м. Разделим его на две зоны - та, в которой для любой точки расстояние до всех стен более метра, и та, в которой лежат все остальные точки комнаты.

Тогда первая зона – это параллелепипед, в основании которого квадрат со стороной 1 м. Объем этого параллелепипеда равен 3 куб.м.

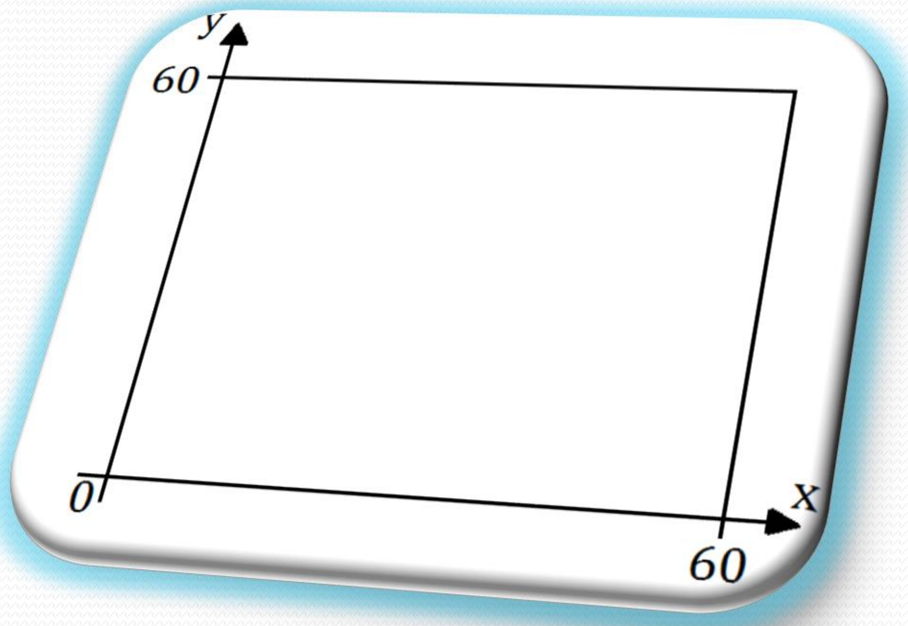
Так как объем всей комнаты равен 27 куб. м, то объем второй зоны равен 27 - 3 = 24 куб. м

Следовательно, вероятность того, что комар будет находиться на расстоянии не более метра от стены, равна

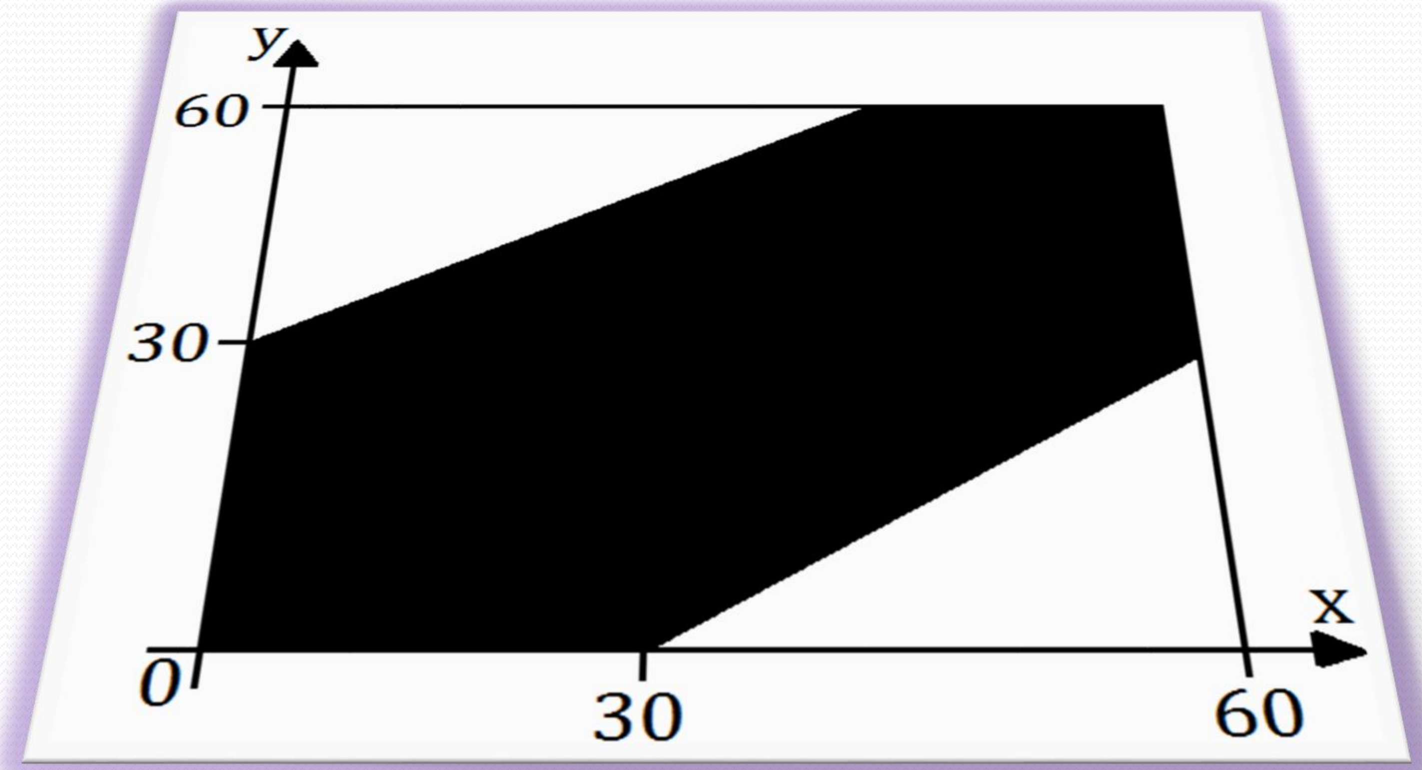
P = 24/27 = 8/9 ≈ 0,89



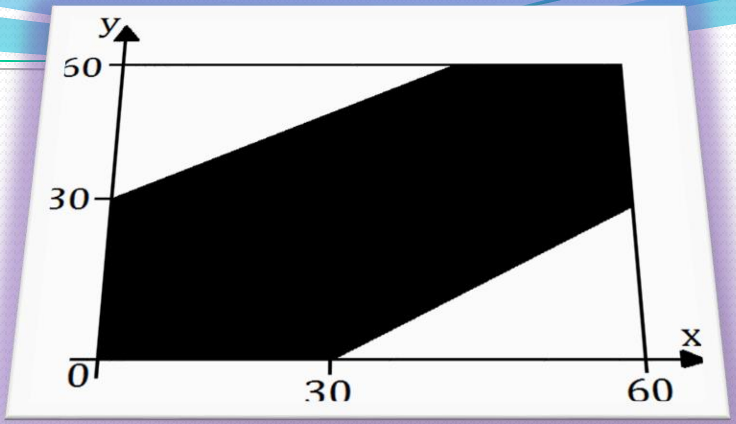
Коля и Оля договорились встретиться в Центральном парке с 12.00 до 13.00. пришедший первым ждёт другого в течении 30 минут, после уходит. Какова вероятность, что они встретятся, если каждый из них с одинаковой вероятностью может прийти в любой момент времени в течении заданного часа?
Обозначаем время прихода в парк Коли через x, а Оли − через y (для удобства будем выражать время в минутах, прошедших после 12часов). Тогда точка с координатами (x, y) будет случайной точкой в квадрате на плоскости Oxy, изображенном на рисунке:



Каждая точка этого квадрата – это один из возможных исходов нашего эксперимента. Эксперимент завершается встречей, если выполняется условие $|x - y| < 30$. множество таких точек закрашено на следующем рисунке:



Площадь закрашенной части можно найти, вычитая из площади квадрата площадь двух равных треугольников:



$$S = 60^2 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 30 \cdot 30$$

$$= 3600 - 900 = 2700$$

Искомую вероятность встречи находим как отношение «благоприятной» площади ко всей площади квадрата:

$$P = \frac{2700}{3600} = \frac{3}{4} = 0,75$$

Петя бросает симметричную монету 26 раз. Во сколько раз вероятность события «решка выпадет ровно 7 раз» превосходит вероятность события «решка выпадет ровно 5 раз»?

Вероятность того, что решка выпадет ровно 7 раз в серии испытаний из 26 бросков (используем схему Бернулли), равна $C_{26}^{7}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{19}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{7}=\frac{26!}{7!\cdot 19!}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{26}$.

Вероятность того, что решка выпадет ровно 5 раз в серии испытаний из 26 бросков (используем схему Бернулли), равна $C_{26}^{5}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{5}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{21}=\frac{26!}{5!\cdot 21!}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{26}$.

Искомое отношение равно $\dfrac{\frac{26!}{7!\cdot 19!}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{26}}{\frac{26!}{5!\cdot 21!}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{26}}=\frac{5!\cdot 21!}{7!\cdot 19!}=\frac{5!}{7!}\cdot\frac{21!}{19!}=\frac{1}{6\cdot 7}\cdot\frac{21\cdot 20}{1}=10.$

Симметричную монету бросают 12 раз. Во сколько раз вероятность события «выпадет 4 орла» больше вероятности события «выпадет 5 орлов»?

Решение. При бросании монеты 12 раз получаем последовательность из двенадцати орлов или решек. Так как на каждом месте этой последовательности может быть один из двух элементов (орёл или решка), то число всех таких последовательностей равно 2^{12}. Число всех последовательностей, у которых ровно на 4-х произвольных местах расположен орёл (на остальных решка), равно числу сочетаний из 12 элементов по 4 — C_{12}^4. Согласно классическому определению вероятности получаем, что вероятность события «выпадает 4 орла», равна $\frac{C_{12}^4}{2^{12}}$.

Аналогично получаем, что вероятность события «выпадает 5 орлов», равна $\frac{C_{12}^5}{2^{12}}$. Находим частное

$$\frac{\frac{C_{12}^4}{2^{12}}}{\frac{C_{12}^5}{2^{12}}} = \frac{C_{12}^4}{C_{12}^5} = \frac{\frac{12!}{4!\cdot 8!}}{\frac{12!}{5!\cdot 7!}} = \frac{5!\cdot 7!}{4!\cdot 8!} = \frac{8}{5} = 1{,}6.$$

Ответ. 1,6.

Замечание. По формуле Бернулли вероятность выпадения 4-х орлов равна $C_{12}^4 \cdot 0{,}5^4 \cdot (1-0{,}5)^{12-4} = C_{12}^4 \cdot 0{,}5^4 \cdot 0{,}5^8$. Вероятность выпадения 5-и орлов равна $C_{12}^5 \cdot 0{,}5^5 \cdot (1-0{,}5)^{12-5} = C_{12}^5 \cdot 0{,}5^5 \cdot 0{,}5^7$.

Искомое частное $\frac{C_{12}^4 \cdot 0{,}5^4 \cdot 0{,}5^8}{C_{12}^5 \cdot 0{,}5^5 \cdot 0{,}5^7} = \frac{C_{12}^4}{C_{12}^5} = 1{,}6.$

Детали, изготовляемые цехом завода, попадают для проверки их на стандартность к одному из двух контролеров. Вероятность того, что деталь попадет к первому контролеру, равна 0,6, а ко второму – 0,4. Вероятность того, что годная деталь будет признана стандартной первым контролером, равна 0,94, а вторым – 0,98. Годная деталь при проверке была признана стандартной. Найти вероятность того, что эту деталь проверил первый контролер.

Искомая вероятность

$$P_A(B1) = (0,6*0,94) / (0,6*0,94 + 0,4*0,98) = 0,59.$$

Как видно, до испытания вероятность гипотезы B_1 равнялась 0,6, после того, как стал известен результат испытания, вероятность этой гипотезы (точнее, условная вероятность) изменилась и стала равной 0,59. Таким образом, использование формулы Бейеса позволило переоценить вероятность рассматриваемой гипотезы.

Детали, изготовляемые цехом завода, попадают для проверки их на стандартность к одному из двух контролеров. Вероятность того, что деталь попадет к первому контролеру, равна 0,6, а ко второму – 0,4. Вероятность того, что годная деталь будет признана стандартной первым контролером, равна 0,94, а вторым – 0,98. Годная деталь при проверке была признана стандартной. Найти вероятность того, что эту деталь проверил первый контролер.

Решение.

Обозначим через А событие, состоящее в том, что годная деталь признана стандартной.

1) деталь проверил первый контролер (гипотеза B1);

2) деталь проверил второй контролер (гипотеза B2).

Искомую вероятность того, что деталь проверил первый контролер, найдем по формуле Бейеса. По условию задачи имеем:

P (B1) = 0,6 (вероятность того, что деталь попадает к первому контролеру);

P (B2) = 0,4 (вероятность того, что деталь попадет ко второму контролеру);

$P_{в_1}(A) = 0{,}94$ (вероятность того, что годная деталь будет признана первым контролером стандартной);

$P_{в_2}(A) = 0{,}98$ (вероятность того, что годная деталь будет признана вторым контролером стандартной).

Искомая вероятность будет равна (по формуле Байеса)

$$P_A(B1) = (0{,}6*0{,}94) / (0{,}6*0{,}94 + 0{,}4*0{,}98) = 0{,}59.$$

Как видно, до испытания вероятность гипотезы B_1 равнялась 0,6, после того, как стал известен результат испытания, вероятность этой гипотезы (точнее, условная вероятность) изменилась и стала равной 0,59.
Таким образом, использование формулы Байеса позволило переоценить вероятность рассматриваемой гипотезы.