Геометрические задачи–
ОГЭ-2023

Попова Елена Юрьевна,
учитель математики
МАОУ СОШ № 5
города Тюмени

Научить решать учащихся геометрические задачи - это значит не только подготовить их к хорошей сдаче экзамена, но и научить их логически мыслить, доказательно отстаивать свою точку зрения, уметь творчески подходить к любому делу.

Структура ОГЭ-2023 (геометрические задания 1 части)

15. Нахождение геометрических величин (треугольники, четырёхугольники, многоугольники и их элементы)

16. Нахождение геометрических величин (окружность, круг, центральные и вписанные углы, касательная, хорда, секущая, радиус, окружность, описанная вокруг многоугольника и вписанная в многоугольник.)

17. Задачи на площади фигур.

18. Задачи с фигурами на квадратной решётке

19. Выбор верных или неверных утверждений (анализ геометрических высказываний)

В заданиях 1-5 также есть геометрические задачи (№3, №4) на нахождение площади или расстояния.

Структура ОГЭ-2023 (геометрические задания 2 части)

23. Геометрическая задача на вычисление (Темы, которые встречаются в задании: углы, треугольники, четырёхугольники, окружности)

24. Задача по геометрии на доказательство (Темы, которые встречаются в задании: правильные многоугольники, треугольники и их элементы, четырёхугольники и их элементы, окружности и их элементы)

25. Геометрическая задача повышенной сложности (Темы, которые встречаются в задании: треугольники, четырёхугольники, окружности, комбинация многоугольников и окружностей)

Трудности решения геометрических задач

- Не существует единых алгоритмов решения
- Необходимость выбора метода решения задачи и теоремы для решения конкретной задачи (нескольких теорем) из большого набора известных фактов
- Нужно решить довольно много задач, чтобы научиться их решать.

Причины ошибок в решении геометрических задач

Незнание и/или непонимание аксиом, определений, теорем

Неумение их применять.

Невнимательное чтение условия и вопроса задания.

Вычислительные ошибки.

Нарушения логики в рассуждениях.

Принятие ошибочных гипотез.

Недостатки в работе с рисунком.

Необходимые условия успеха при решении задач по геометрии

Уверенное владение основными понятиями и их свойствами (определения, аксиомы, теоремы, базовые задачи)

Знание основных методов и приёмов решения задач

Умение комбинировать методы и приёмы решения задач

Наличие опыта решения задач

Специфические особенности методов решения геометрических задач

Большое разнообразие

Взаимозаменяемость

Трудность формального описания

Отсутствие чётких границ применения (в отличие от алгебры)

Использование комбинаций методов и приёмов.

О ПОИСКЕ РЕШЕНИЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ

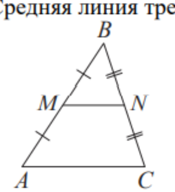
•Треугольник равнобедренный, следовательно …

•Две касательные проведены из одной точки, следовательно …

• Прямая, проходящая через центр окружности и эту точку, делит угол между касательными пополам, следовательно…
и т. д

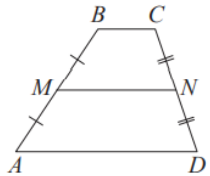
Сумма углов выпуклого n-угольника равна $180°(n-2)$.

Средняя линия треугольника и трапеции



MN — ср. лин.
$MN \parallel AC$

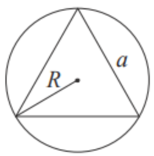
$MN = \dfrac{AC}{2}$



$BC \parallel AD$
MN — ср. лин.
$MN \parallel AD$

$MN = \dfrac{BC+AD}{2}$

Описанная и вписанная окружности правильного треугольника

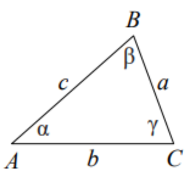


$R = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$

$S = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$

$r = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}$

$h = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$



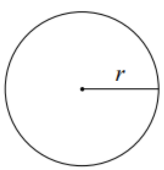
Для треугольника ABC со сторонами $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R,$$

где R — радиус описанной окружности.

Для треугольника ABC со сторонами $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C.$$

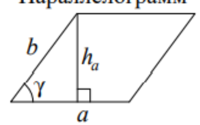


Длина окружности $C = 2\pi r$

Площадь круга $S = \pi r^2$

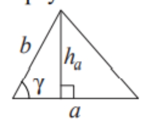
Площади фигур

Параллелограмм



$S = ah_a$
$S = ab\sin\gamma$

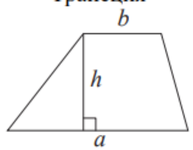
Треугольник



$S = \dfrac{1}{2}ah_a$

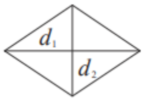
$S = \dfrac{1}{2}ab\sin\gamma$

Трапеция



$S = \dfrac{a+b}{2}\cdot h$

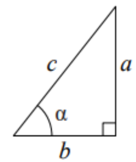
Ромб



d_1, d_2 — диагонали

$S = \dfrac{1}{2}d_1 d_2$

Прямоугольный треугольник



$\sin\alpha = \dfrac{a}{c}$

$\cos\alpha = \dfrac{b}{c}$

$\text{tg}\,\alpha = \dfrac{a}{b}$

Теорема Пифагора: $a^2 + b^2 = c^2$

Основное тригонометрическое тождество: $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

Некоторые значения тригонометрических функций

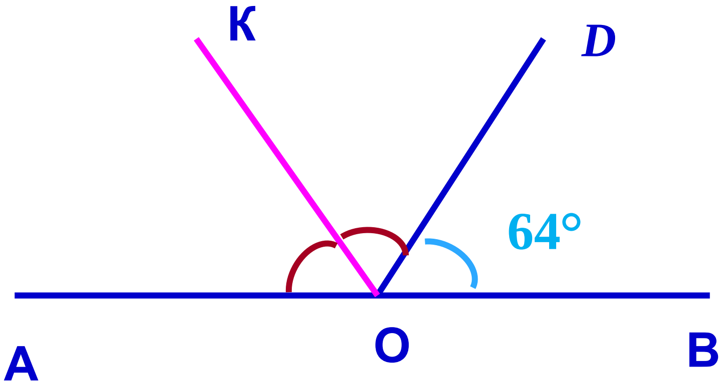
α	градусы	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
$\sin\alpha$		0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	−1	0
$\cos\alpha$		1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	−1	0	1
$\text{tg}\,\alpha$		0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	—	0	—	0

Задание № 15 (ОГЭ – 2023)

Треугольники, четырехугольники, многоугольники и их элементы.

- Углы
- Треугольники общего вида
- Равнобедренные треугольники
- Прямоугольные треугольники
- Параллелограмм
- Ромб
- Трапеция
- Многоугольники

Найдите величину угла AOK, если OK — биссектриса угла AOD, $\angle DOB = 64°$. Ответ дайте в градусах.



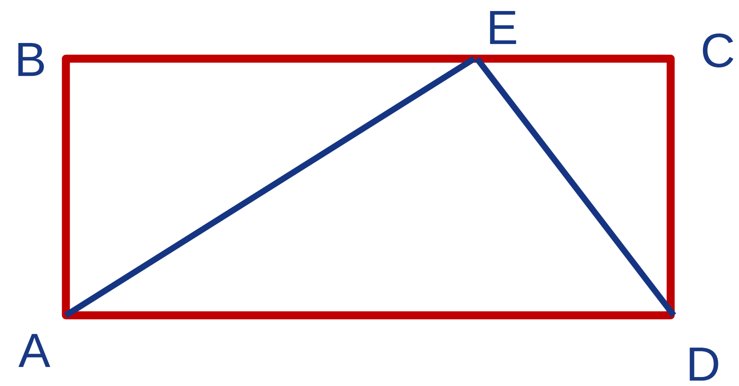
Углы AOD и DOB — смежные, вместе составляют развёрнутый угол, следовательно, $\angle AOD = 180° - \angle DOB = 180° - 64° = 116°.$
Поскольку OK — биссектриса угла AOD, то

$$\angle AOK = \angle DOK = \angle AOD/2 = 116°/2 = 58°.$$

Необходимо знать:

1. Сумма смежных углов 180°
2. Биссектриса делит угол пополам

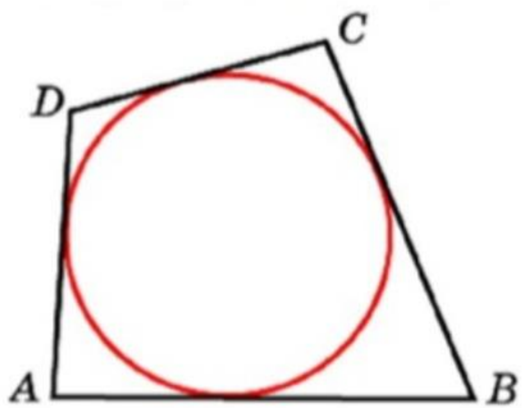
На стороне BC прямоугольника ABCD, у которого AB = 12 и AD = 17, отмечена точка E так, что ∠EAB = 45°. Найдите ED.



Решение.
Треугольник ABE — прямоугольный, угол EAB равен 45°, поскольку сумма углов треугольника равна 180°, угол BEA равен 180° - 90° - 45°г=45°
Следовательно, треугольник ABE — равнобедренный, поэтому AB=BE=12.
Найдём отрезок CE:
CE=BC - BE=17 - 12= 5.
Из прямоугольного треугольника CED найдём ED по теореме Пифагора:

$$ED = \sqrt{CE^2 + CD^2} = \sqrt{CE^2 + AB^2} = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13.$$

В четырёхугольник ABCD вписана окружность. Периметр четырёхугольника равен 100 см, сторона CD = 10см. Найдите сторону AB. Ответ дайте в см.

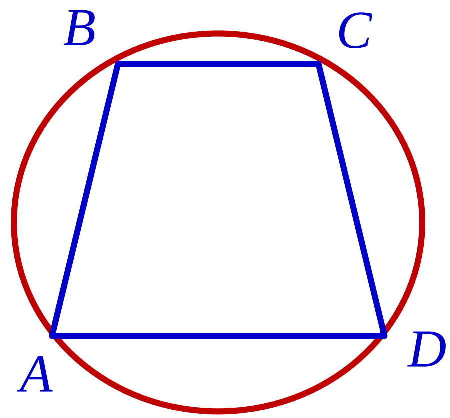


Многие ученики ошибочно предполагают, что этот четырёхугольник является квадратом. Однако в нашем случае противоположные стороны не равны. Чтобы избежать таких ошибок, нужно знать свойство вписанной в четырехугольник окружности. Для того чтобы вписать окружность внутрь четырёхугольника, суммы противоположных сторон должны быть равны между собой и должны быть равны полупериметру.

То есть, сумма CD и AB должна быть равна сумме CB и DA. А также CD+AB = полупериметр (p). По условию, периметр равен 100 см. Значит, полупериметр будет равен 50 см. По условию, CD = 10 см. Следовательно, AB = p – 10 = 50 – 10 = 40 см

Окружность вписана, значит касается сторон четырехугольника. Следовательно используем свойство сторон описанного четырехугольника.

Угол А четырёхугольника ABCD, вписанного в окружность, равен 82°. Найдите угол С этого четырёхугольника. Ответ дайте в градусах.



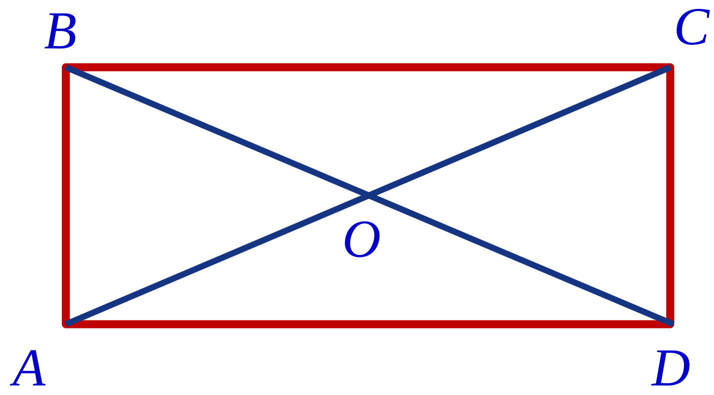
Сумма противоположных углов четырехугольника, вписанного в окружность, равна 180°:

$$\angle A + \angle C = 180^\circ,$$

$$\angle C = 180^\circ - \angle A = 180^\circ - 82^\circ = 98^\circ.$$

Окружность описана, значит касается вершин углов четырехугольника. Следовательно используем свойство углов вписанного четырехугольника.

Диагонали AC и BD прямоугольника ABCD пересекаются в точке O, BO = 7, AB = 6. Найдите AC.



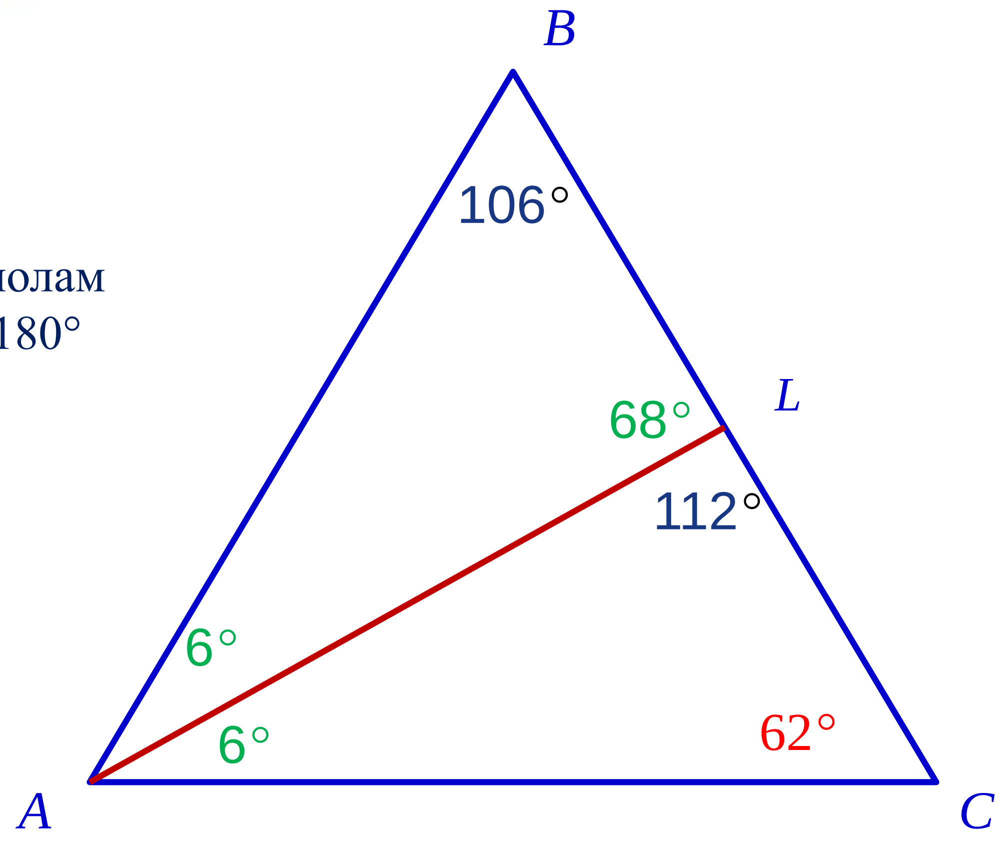
Диагонали в прямоугольнике равны и точкой пересечения делятся пополам

значит, AC = BD = 2BO = 14.

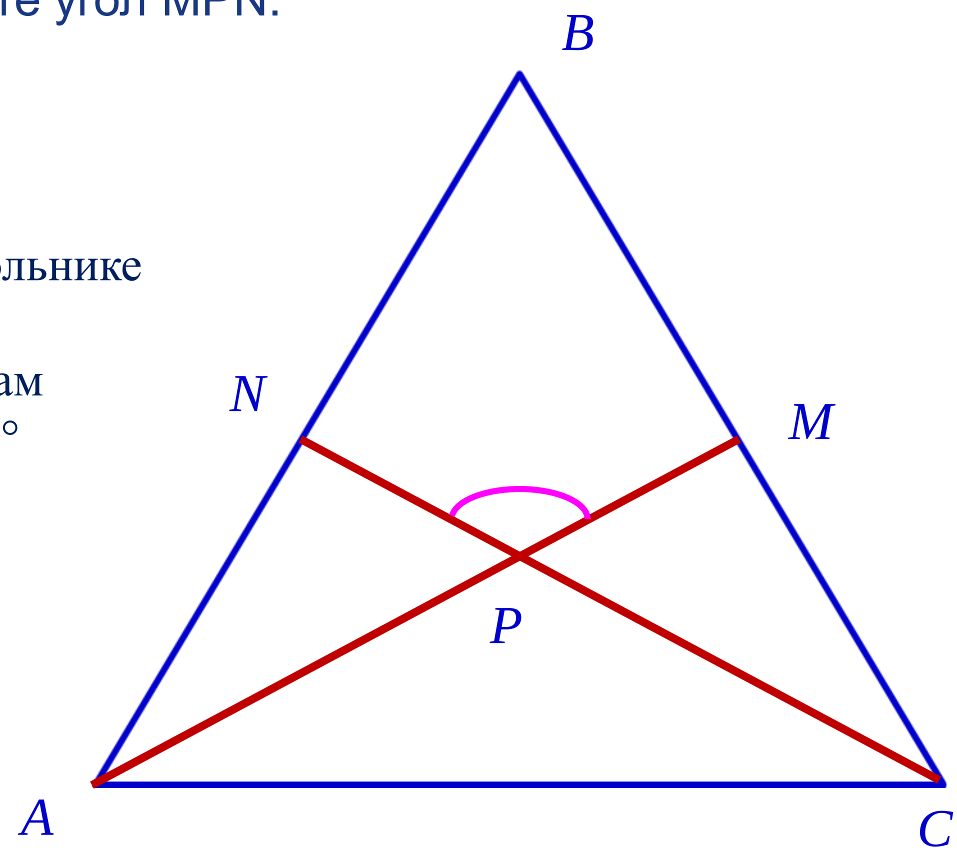
В треугольнике ABC проведена биссектриса AL, угол ALC равен 112°, угол ABC равен 106°. Найдите угол ACB. Ответ дайте в градусах.

Необходимо знать:

1. Сумма смежных углов 180°
2. Биссектриса делит угол пополам
3. Сумма углов треугольника 180°



В равностороннем треугольнике ABC биссектрисы CN и AM пересекаются в точке P. Найдите угол MPN.



Необходимо знать:

1. Углы в равностороннем треугольнике равны 60°
2. Биссектриса делит угол пополам
3. Сумма углов треугольника 180°
4. Вертикальные углы равны

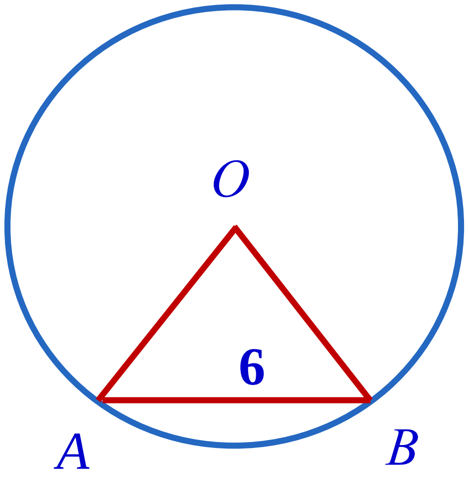
Задание № 16 (ОГЭ – 2023)
Окружность, круг и их элементы.

- Центральные и вписанные углы
- Касательная, хорда, секущая, радиус
- Окружность, описанная вокруг многоугольника

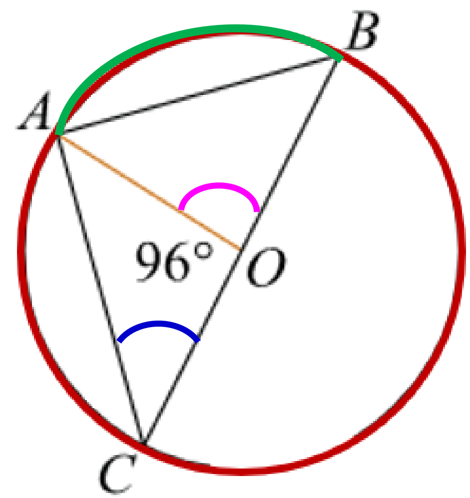
Центральный угол АОВ опирается на хорду АВ длиной 6. При этом угол ОАВ равен 60°. Найдите радиус окружности.

Необходимо знать:

1. Углы в равностороннем треугольнике равны 60°
2. Сумма углов треугольника 180°
3. Углы при основании равнобедренного треугольника равны.



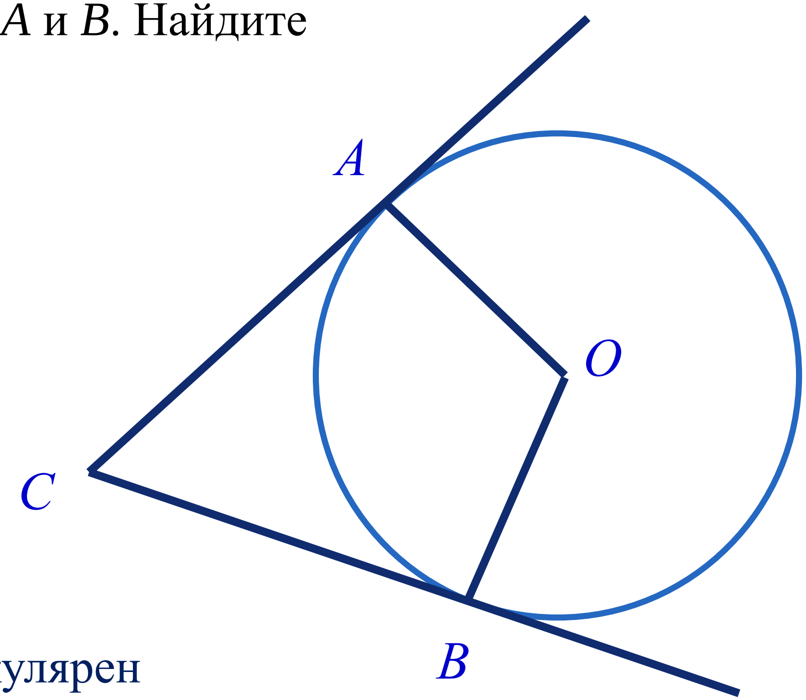
Найдите градусную меру $\angle ACB$, если известно, что BC является диаметром окружности, а градусная мера центрального $\angle AOC$ равна 96°.



Необходимо знать:

1. Вписанный треугольник, у которого одна из сторон диаметр, является прямоугольным
2. Сумма смежных углов 180°
3. Градусная мера центрального угла в 2 раза больше градусной меры вписанного угла, опирающегося на ту же дугу.

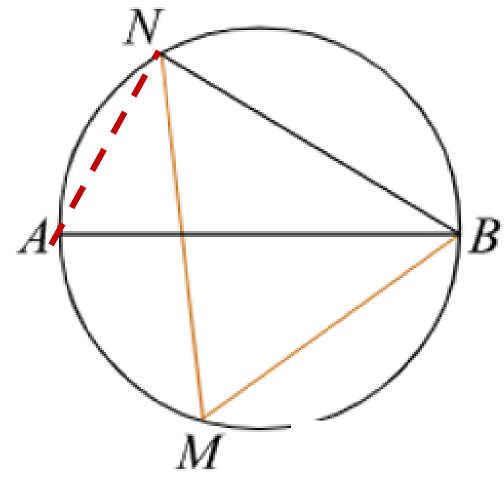
В угол *C* величиной 83° вписана окружность с центром *O*, которая касается сторон угла в точках *A* и *B*. Найдите угол *AOB*. Ответ дайте в градусах.



Необходимо знать
1. Радиус окружности перпендикулярен касательной в точке касания
2. Сумма углов четырёхугольника равна 360°

Ответ: 97°

На окружности по разные стороны от диаметра AB взяты точки M и N. Известно, что $\angle NBA = 38°$. Найдите угол NMB. Ответ дайте в градусах.



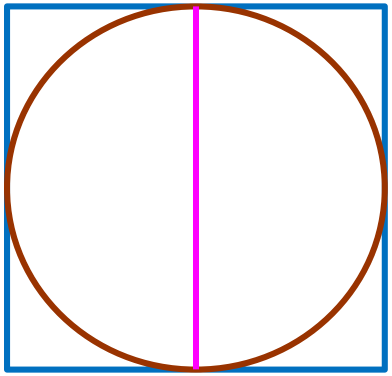
Угол NBA — вписанный, поэтому он равен половине дуги, на которую он опирается. Следовательно, дуга

$AN = 2\angle NBA = 2 \cdot 38° = 76°$. Диаметр AB делит окружность на две равные части, поэтому величина дуги ANB равна 180°. Откуда дуга $NB = 180° - 76° = 104°$.
Угол NMB — вписанный, поэтому он равен половине дуги, на которую он опирается, то есть равен $104°/2 = 52°$.

Задание № 17 (ОГЭ – 2023)
Площади фигур

- Квадрат
- Прямоугольник
- Параллелограмм
- Треугольники общего вида
- Прямоугольный треугольник
- Равнобедренный треугольник
- Трапеция
- Площадь круга и его частей

Найдите площадь квадрата, описанного вокруг окружности радиуса 7.



Решение.

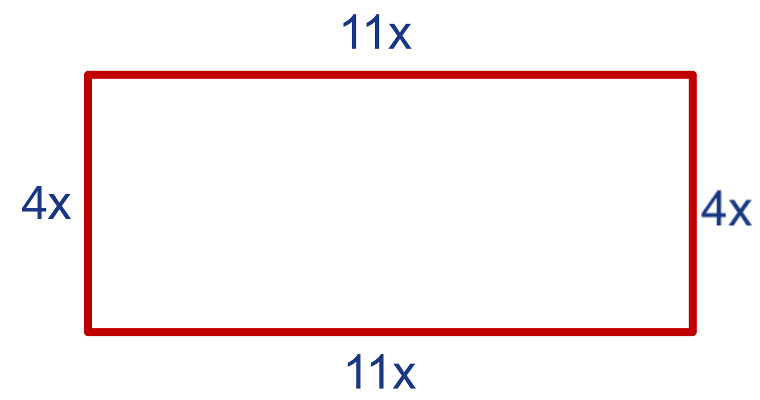
Пусть r и D соответственно радиус и диаметр окружности, a — сторона квадрата. Сторона квадрата равна диаметру вписанной окружности.

$a = D = 2r = 14$

Найдём площадь квадрата: $S = 196$

Найдите площадь прямоугольника, если его периметр равен 60, а отношение соседних сторон равно 4:11

Пусть одна часть равна x
Периметр равен 4x+11x+4x+11x =30x
По условию периметр равен 60. Значит
30x = 60
x = 2
То есть стороны прямоугольника равны
4* 2 = 8 и 11 * 2 = 22
Поэтому площадь равна 22 * 6 = 176



Способ решения («Решу ОГЭ»)

Площадь прямоугольника равна произведению его сторон. Найдём стороны прямоугольника. Пусть x — большая сторона прямоугольника, тогда другая сторона равна $\frac{4}{11}x$. Следовательно, периметр прямоугольника равен

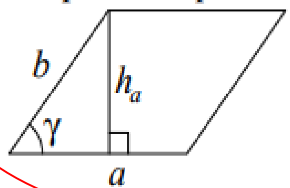
$$2\left(x+\frac{4}{11}x\right)=60,$$

откуда $\frac{15}{11}x=30 \Leftrightarrow x=22$. Поэтому площадь прямоугольника равна $22\cdot\frac{4}{11}\cdot 22=176$.

Одна из сторон параллелограмма равна 12, другая равна 5, а синус одного из углов равен 1/3. Найдите площадь параллелограмма.

Площади фигур

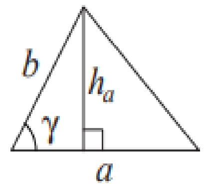
Параллелограмм



$S = ah_a$

$S = ab\sin\gamma$

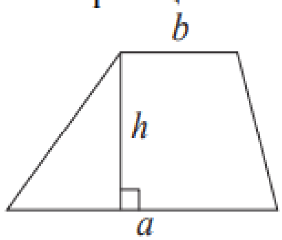
Треугольник



$S = \frac{1}{2}ah_a$

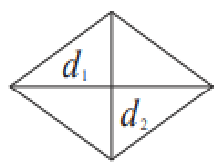
$S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$

Трапеция



$S = \frac{a+b}{2} \cdot h$

Ромб



d_1, d_2 — диагонали

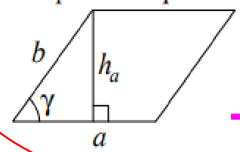
$S = \frac{1}{2}d_1 d_2$

Решение $12 \cdot 5 \cdot \frac{1}{3} = 20.$

Одна из сторон параллелограмма равна 12, другая равна 5, а косинус одного из углов равен $\frac{2\sqrt{2}}{3}$. Найдите площадь параллелограмма.

Площади фигур

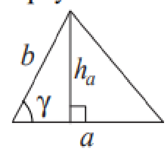
Параллелограмм



$S = ah_a$

$S = ab\sin\gamma$

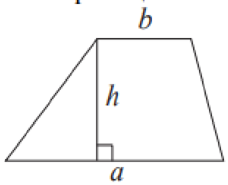
Треугольник



$S = \frac{1}{2}ah_a$

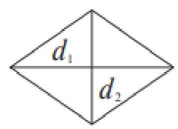
$S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$

Трапеция



$S = \frac{a+b}{2}\cdot h$

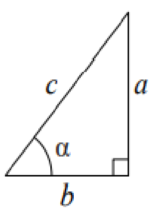
Ромб



d_1, d_2 — диагонали

$S = \frac{1}{2}d_1 d_2$

Прямоугольный треугольник



$\sin\alpha = \frac{a}{c}$

$\cos\alpha = \frac{b}{c}$

$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}$

Теорема Пифагора: $a^2 + b^2 = c^2$

Основное тригонометрическое тождество: $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

$$\sin\gamma = \sqrt{1 - cos^2\gamma} = \frac{1}{3}$$

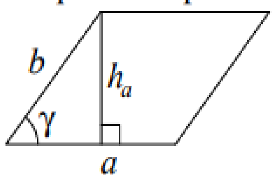
Тогда площадь параллелограмма будет равна.

$$12\cdot 5\cdot \frac{1}{3} = 20.$$

Найдите площадь ромба, если его диагонали равны 14 и 6.

Площади фигур

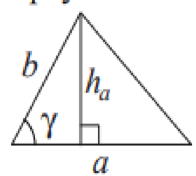
Параллелограмм



$S = ah_a$

$S = ab\sin\gamma$

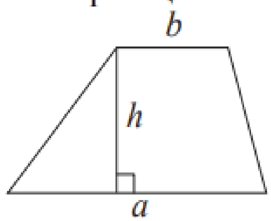
Треугольник



$S = \frac{1}{2}ah_a$

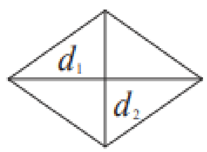
$S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$

Трапеция



$S = \frac{a+b}{2}\cdot h$

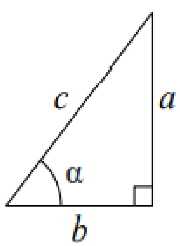
Ромб



$d_1,\ d_2$ — диагонали

$S = \frac{1}{2}d_1d_2$

Прямоугольный треугольник



$\sin\alpha = \frac{a}{c}$

$\cos\alpha = \frac{b}{c}$

$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{a}{b}$

Теорема Пифагора: $a^2 + b^2 = c^2$

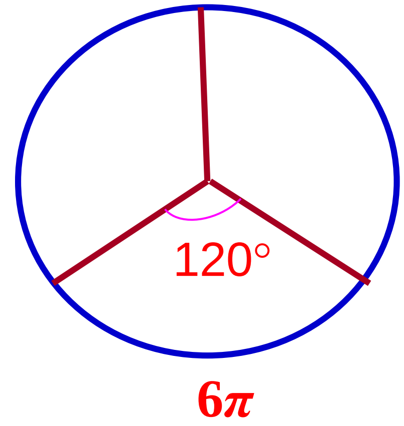
Основное тригонометрическое тождество: $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

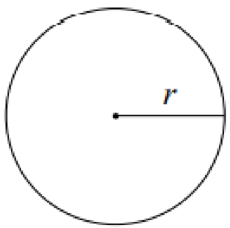
Площадь ромба равна

$$S = \frac{1}{2}14\cdot 6 = 42.$$

Найдите площадь кругового сектора, если длина ограничивающей его дуги равна 6π, а угол сектора равен $120°$. В ответе укажите площадь, *деленную на* π.

Площадь кругового сектора в три раза меньше площади круга.





Длина окружности $C = 2\pi r$

Площадь круга $S = \pi r^2$

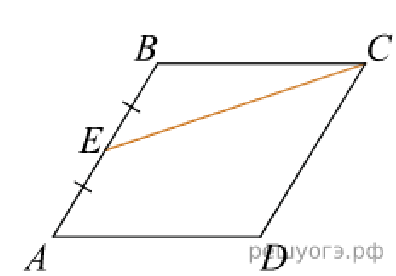
Длина окружности равна $6\pi * 3 = 18\pi$. Отсюда радиус равен $18\pi : 2\pi = 9$

Тогда площадь круга равна 81π.

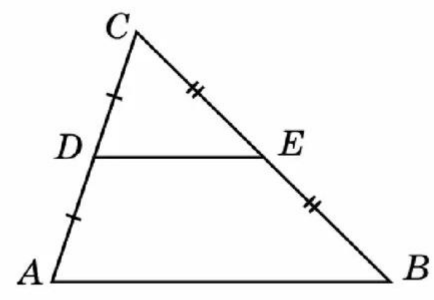
Тогда площадь кругового сектора равна $81\pi : 3 = 27\pi$.

Ответ: 27

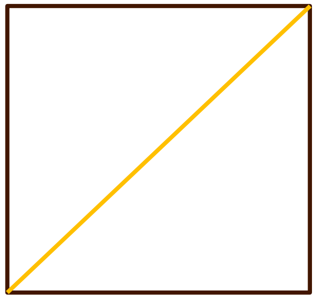
Полезные факты



Площадь треугольника BCE в 4 раза меньше площади параллелограмма ABCD



Площадь треугольника DCE в 4 раза меньше площади треугольника ABC

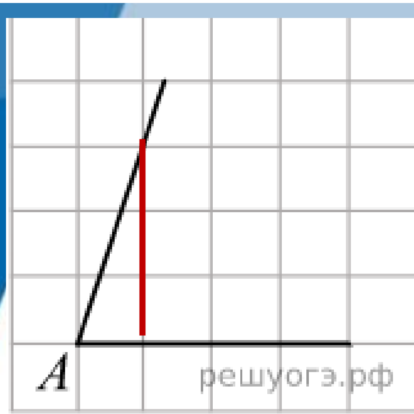


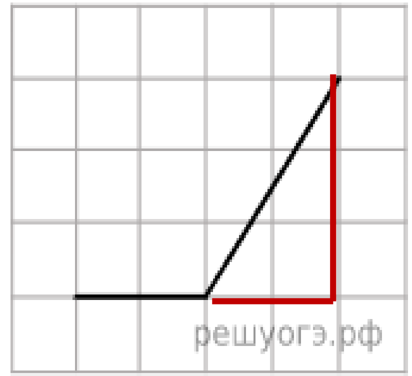
Диагональ квадрата в √2 раз больше его стороны

Задание № 18 (ОГЭ – 2023)
Фигуры на квадратной решётке

- Углы
- Расстояние от точки до прямой
- Треугольники общего вида
- Прямоугольный треугольник
- Параллелограмм
- Ромб
- Трапеция
- Многоугольники

На квадратной сетке изображён угол А. Найдите тангенс А.

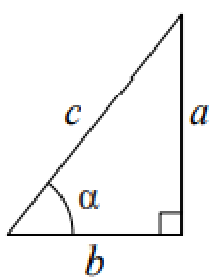




3 : 1 = 3

- 3 : 2 = - 1,5

Прямоугольный треугольник

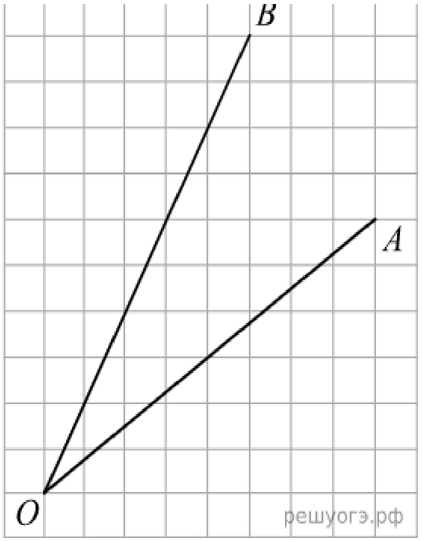


$$\sin\alpha = \frac{a}{c}$$

$$\cos\alpha = \frac{b}{c}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}$$

Найдите тангенс угла AOB. Размер клетки 1×1.



Решение.

Найдем каждую из сторон треугольника AOB, чтобы показать, что он прямоугольный.

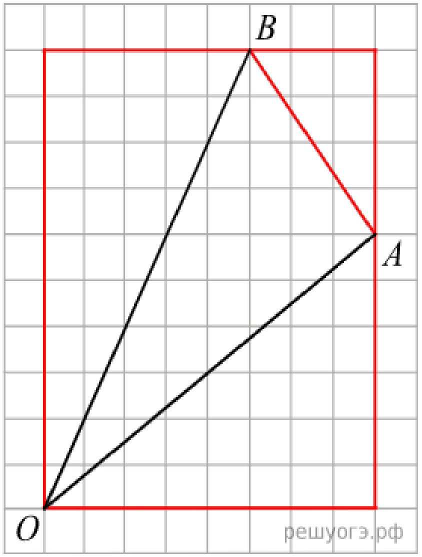
$$OB = \sqrt{5^2 + 10^2} = \sqrt{125},$$

$$AB = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25},$$

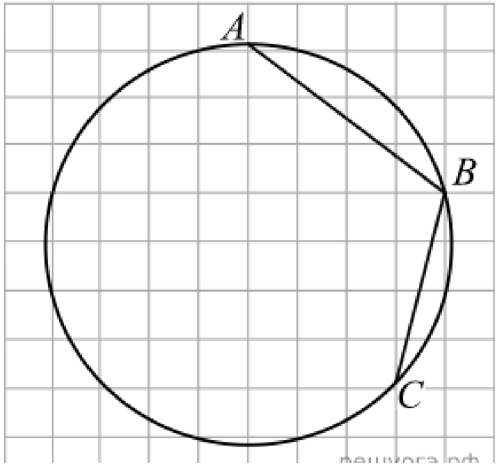
$$OA = \sqrt{6^2 + 8^2} = \sqrt{100}.$$

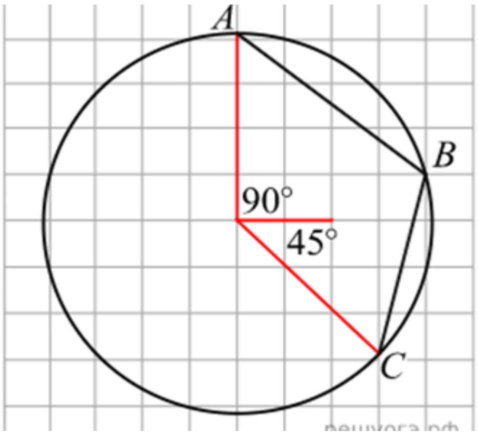
Таким образом, $OB^2 = OA^2 + AB^2$.

$$\operatorname{tg} AOB = \frac{AB}{AO} = \frac{\sqrt{25}}{\sqrt{100}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2} = 0,5.$$



Найдите угол *ABC*





Решение.

Проведем дополнительные построения. Угол AOC - центральный и равен $135°$. Большая дуга AC равна $360° - 135° = 225°$. Искомый угол опирается на большую дугу AC, он является вписанным, а , значит, равен половине дуги AC: $225° : 2 = 112{,}5°$

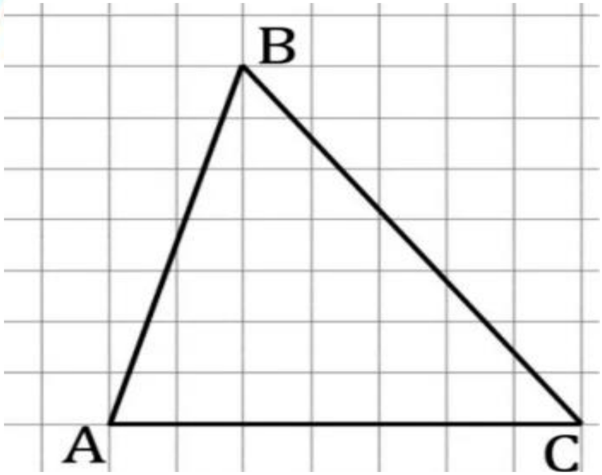
На клетчатой бумаге с размером клетки 1x1 изображён треугольник *ABC* *или изображена трапеция* . Найдите длину его высоты, опущенной на сторону *AC*.

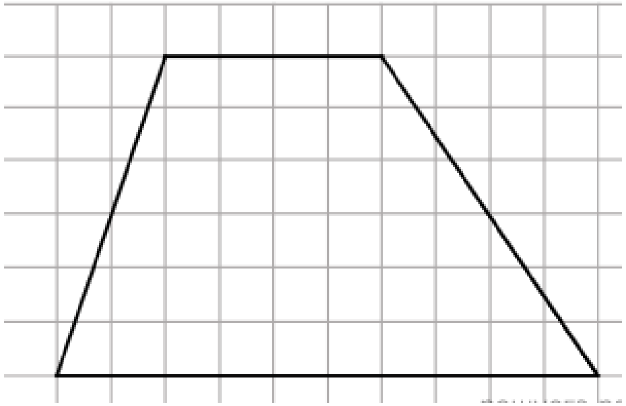
Или

Найдите среднюю линию треугольника (*трапеции*), параллельную AC

Или

Найдите площадь треугольника (*трапеции*)

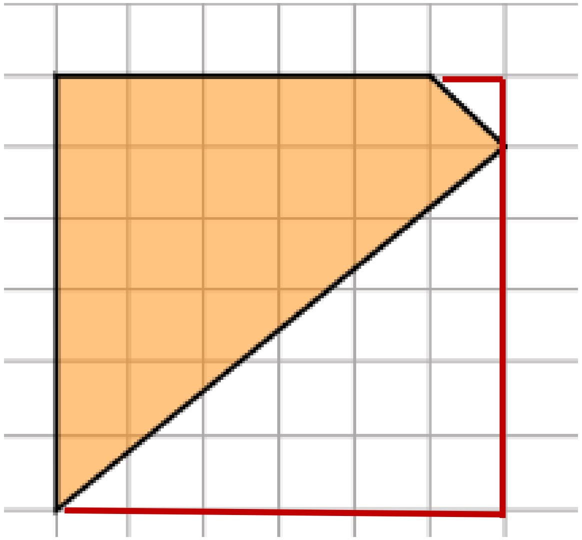


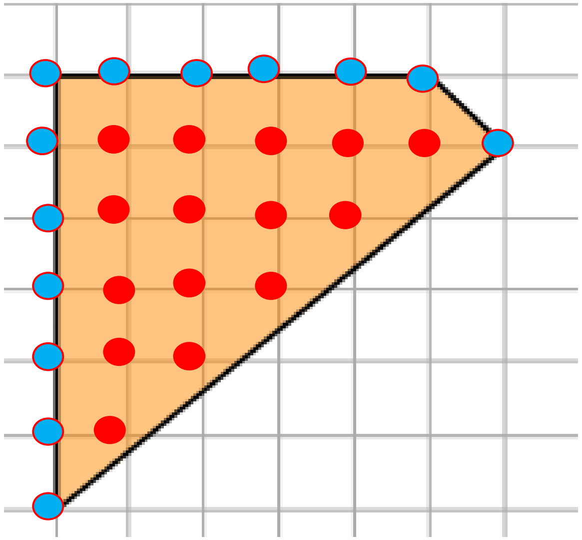


Площадь одной клетки равна 1. Найдите площадь фигуры, изображённой на рисунке.

Sкв = 6*6 =36

36 – 0,5 – 15 = 20,5





Найдём площадь данной фигуры по формуле Пика:

S = В + Г/2 − 1,

где В — число узлов сетки внутри фигуры,

Г — число узлов сетки на границе фигуры, включая вершины. Получаем:

S = 15 + 13/2 − 1 = 20,5.

Задание № 19 (ОГЭ – 2023)
Анализ геометрических высказываний

Многие девятиклассники допускают ошибки именно в задании № 19 “Анализ геометрических высказываний”

Объем утверждений достаточно большой, поэтому лучше распределить их по разделам:

Аксиомы
Углы
Треугольники
Четырехугольники
Окружности
Симметрия

Стоит серьёзно отнестись к утверждениям, которые с первого раза очевидными не кажутся. Их необходимо осмыслить, понять. Надо начертить картинку к такому утверждению и подумать, почему оно верно (или неверно).

Зубрёжка – бесполезное занятие. Любое утверждение можно сформулировать по-разному, поэтому самое главное – это понимание.

Некоторые примеры неверных высказываний

Любые три прямые имеют не менее одной общей точки.

(Эти три прямые могут быть параллельны друг другу и не иметь общих точек вообще).

Существует квадрат, который не является прямоугольником.

(Любой квадрат является частным случаем прямоугольника, потому что прямоугольник – это четырехугольник, у которого все углы по 90°).

Любые два прямоугольных треугольника подобны.

(У подобных треугольников должны быть равны углы. Если взять два произвольных прямоугольных треугольника, то не обязательно два острых угла одного треугольника будут соответственно равны двум острым углам другого).

•Стороны треугольника пропорциональны косинусам противолежащих углов.
(Теорема синусов: Стороны треугольника пропорциональны синусам противолежащих углов.)
•Квадрат любой стороны треугольника равен сумме квадратов двух других сторон без удвоенного произведения этих сторон на синус угла между ними.
(Если бы в формулировке вместо синуса стоял косинус, было бы верным данное утверждение).
•Площадь трапеции равна произведению суммы оснований на высоту.
(Площадь трапеции равна произведению полусуммы оснований на высоту).
•Каждая из биссектрис равнобедренного треугольника является его медианой.
(Только биссектриса, проведенная к основанию. Биссектриса, проведенная к боковой стороне не будет являться медианой).
•Точка пересечения двух окружностей равноудалена от центров этих окружностей.
(Равноудалена – находится на одном и расстоянии от обоих центров. Если окружности будут разного радиуса, то точка пересечения окружностей будет ближе к центру окружности меньшего радиуса).

Геометрические задачи с развернутым ответом– ОГЭ-2023

Попова Елена Юрьевна,
учитель математики
МАОУ СОШ № 5
города Тюмени

Задания второй части ОГЭ
направлены на проверку владения материалом на повышенном уровне.
Их назначение – дифференцировать хорошо успевающих школьников по уровням подготовки, выявить наиболее подготовленную часть выпускников, составляющую потенциальный контингент профильных классов.

Геометрические задачи второй части

Задача 23

(на вычисление)

направлена на проверку умения решить несложную геометрическую задачу на вычисление.

Задача 24

(на доказательство)

связана

со свойствами

треугольников,

четырехугольников,

окружностей

Задача 25

требует свободного владения материалом и довольно высокого уровня математического развития. Рассчитана на обучающихся, изучавших математику более основательно

Методы решения геометрических задач

геометрический – когда требуемое утверждение выводится с помощью логических рассуждений из ряда известных теорем;

алгебраический – когда искомая геометрическая величина вычисляется на основании различных зависимостей между элементами геометрических фигур непосредственно или с помощью уравнений;

комбинированный – когда на одних этапах решение ведется геометрическим методом, а на других – алгебраическим.

Некоторые методы решения геометрических задач

- Применение ключевых задач
- Метод вспомогательных построений
- Переход к равновеликим фигурам
- Метод площадей

Задание 23

Проверяемые умения

Уметь выполнять действия с геометрическими фигурами. Проводить доказательные рассуждения при решении задач.

Типичные ошибки:

- неверное построения чертежа к задаче;
-решают частную задачу, изменяя фактически ее смысл;
-неправильно указан признак подобия треугольников;
-неверно найдены сходственные стороны;
-неверно решена пропорция;
-вычислительные ошибки.

Задача 23 на вычисление

- Углы
- Треугольники
- Четырехугольники
- Окружности

Критерии оценивания выполнения задания 23

Баллы	Содержание критерия
2	Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, получен верный ответ
1	Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, но даны неполные объяснения или допущена одна вычислительная ошибка
0	Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше
2	*Максимальный балл*

Этапы решения геометрической задачи

1. Чтение условия задачи
2. Выполнение чертежа с буквенными обозначениями
3. Краткая запись условия задачи.
4. Перенос числовых данных на чертеж
5. Анализ данных задачи
6. Составление цепочки действий
7. Запись решения задачи
8. Запись ответа

Анализ данных задачи

1. О чем идет речь в задаче?
2. Что нам известно о данной фигуре?
3. Что надо найти в задаче?
4. Каким образом можно найти неизвестную величину? Какие геометрические утверждения помогут?

Задача (демоверсия ОГЭ-2023)

В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом C известны катеты: AC = 6 , BC = 8 . Найдите медиану CK этого треугольника.

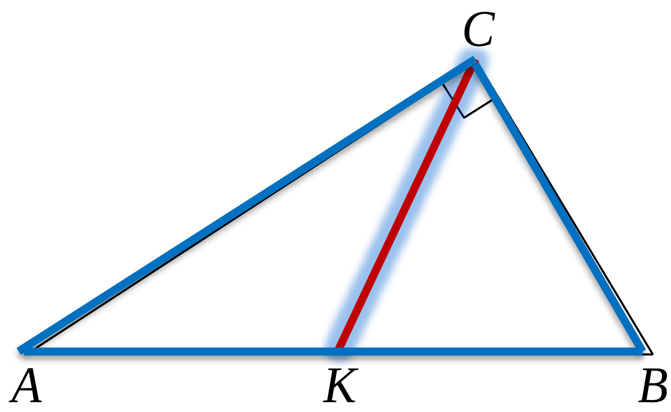
Решение. По свойству медианы прямоугольного треугольника, проведенной из вершины прямого угла. $CK = \frac{1}{2} AB$

Так как по теореме Пифагора

$$AB = \sqrt{AC^2 + BC^2}$$

То $CK = \frac{1}{2} AB = \frac{1}{2}\sqrt{AC^2 + BC^2} =$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{36 + 64} = 5.$$



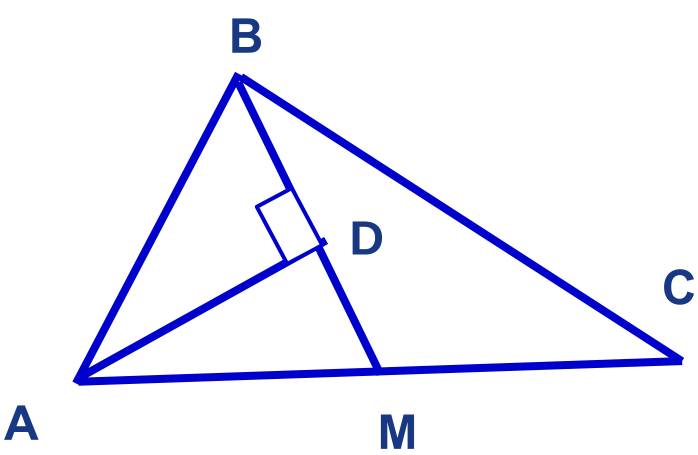
Ответ: 5.

Прямая *AD*, перпендикулярная медиане *BM* треугольника *ABC*, делит её пополам. Найдите сторону *AC*, если сторона *AB* равна 4.

Решение

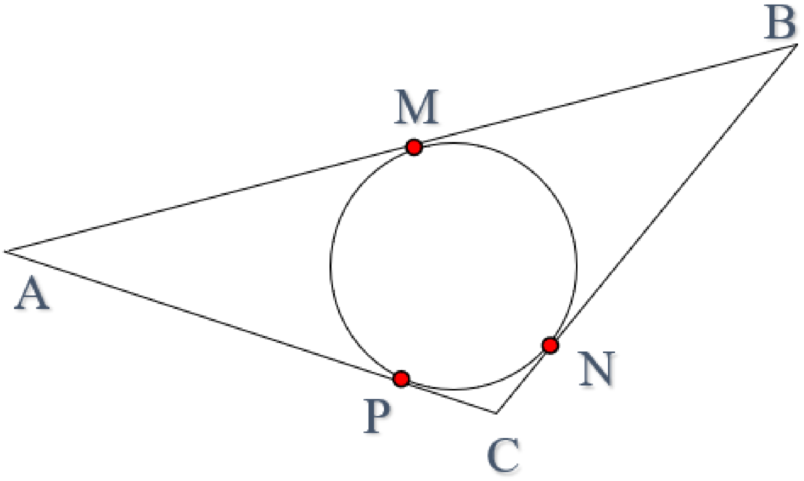
Так как высота AD, проведенная к медиане BM делит ее пополам, то треугольник ABM является равнобедренным, поэтому AB=AM=4

Так как BM- медиана, то AM=MC, таким образом, AC=2AM=8.



Ответ: 8

В треугольник ABC вписана окружность. Найдите радиус этой окружности, если AB=13см, BC=14см, CA=15см.



Решим методом площадей

$$S = \frac{1}{2} P \cdot r$$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$где\ p = \frac{a+b+c}{2}$$

OP=2S/P

S найдем по формуле Герона

S=84

OP=4, тогда искомое расстояние по т. Пифагора равно 3

Окружность пересекает стороны *AB* и *AC* треугольника *ABC* в точках *K* и *P* соответственно и проходит через вершины *B* и *C*. Найдите длину отрезка *KP*, если *AK* = 18, а сторона *AC* в 1,2 раза больше стороны *BC*.

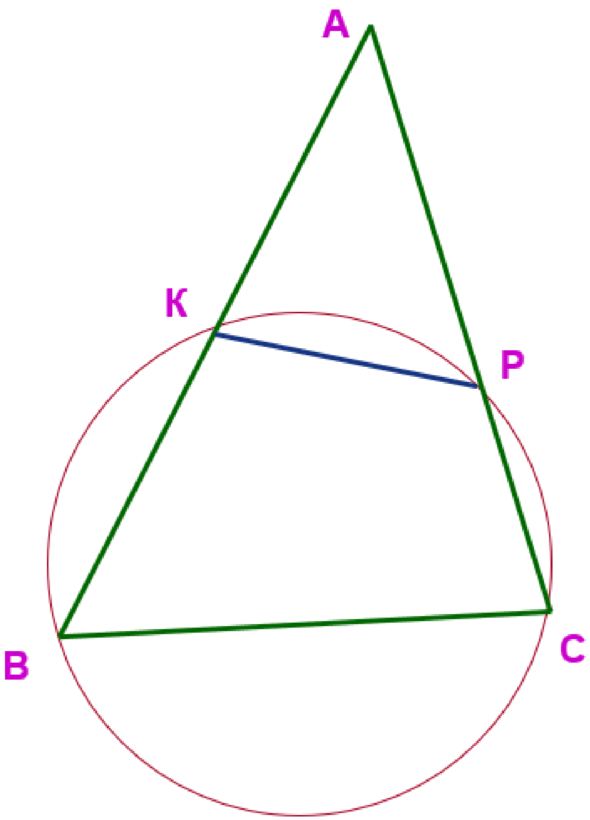
Решение $\angle KBC + \angle KPC = 180^\circ$. (так как КВРС – вписанный). Углы АРК и КРС – смежные, значит их сумма равна 180^0 . Получаем, что углы АРК и КВС – равны. Рассмотрим

$\triangle$ АКР и $\triangle$ АСВ

Угол А –общий, углы АРК и КВС – равны, следовательно $\triangle$ АКР ~ $\triangle$ АСВ

Откуда

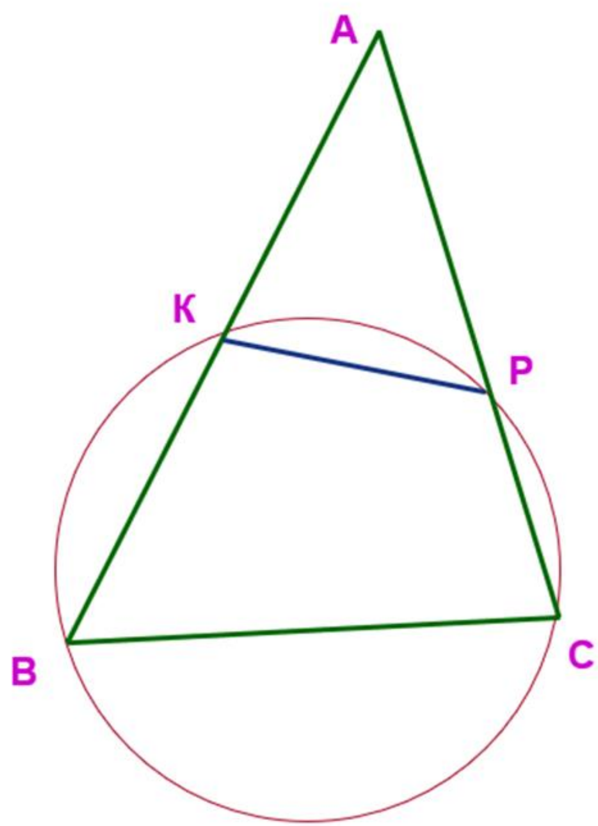
$$\frac{KP}{BC} = \frac{AK}{AC} = \frac{AP}{AB}.$$



Окружность пересекает стороны *AB* и *AC* треугольника *ABC* в точках *K* и *P* соответственно и проходит через вершины *B* и *C*. Найдите длину отрезка *KP*, если *AK* = 18, а сторона *AC* в 1,2 раза больше стороны *BC*.

Найдем КР

$$\frac{AK}{1,2BC}=\frac{KP}{BC}\Leftrightarrow KP=\frac{AK}{1,2}\Leftrightarrow KP=15.$$



***Ответ:* 15**

Задание 24

Проверяемые умения

Проводить доказательные рассуждения при решении задач.

Типичные ошибки:

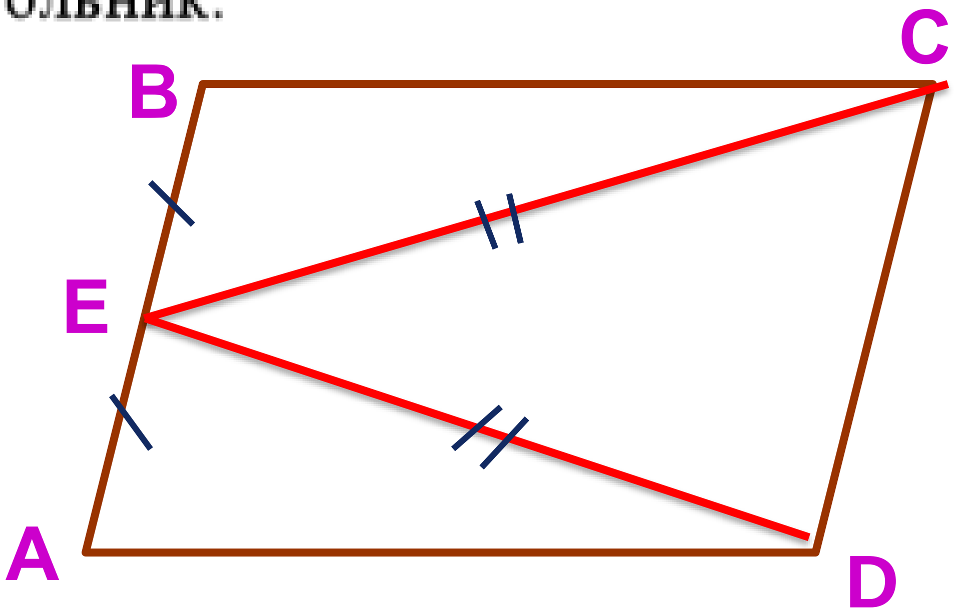
- неверное построения чертежа к задаче
- неполное доказательство;
- путают свойства и признаки геометрической фигуры;
- интуитивно понятные факты не доказывают, считая их очевидными, а также не умеют математически грамотно и ясно записывать решение, приводя при этом необходимые пояснения и обоснования.

Критерии оценивания выполнения задания 24

Баллы	Содержание критерия
2	Доказательство верное, все шаги обоснованы
1	Доказательство в целом верное, но содержит неточности
0	Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше
2	*Максимальный балл*

24 В параллелограмме $ABCD$ точка E — середина стороны AB. Известно, что $EC = ED$. Докажите, что данный параллелограмм — прямоугольник.

Доказательство.
Треугольники BEC и AED равны по трём сторонам. Значит, углы CBE и DAE равны. Так как их сумма равна $180°$, то углы равны $90°$. Такой параллелограмм — прямоугольник.

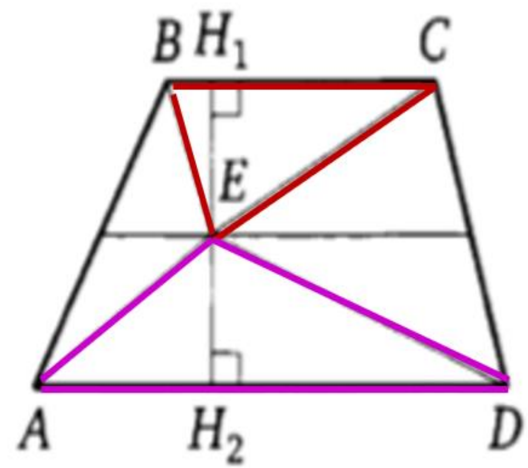


На средней линии трапецииABCD с основаниями AD и BC выбрали произвольную точку E. Докажите, что сумма площадей треугольников BEC и AED равна половине площади трапеции

Решение. Проведём через точку E высоту H_1H_2 трапеции. По теореме Фалеса средняя линия разделит высоту пополам.

Пусть $EH_1 = EH_2 = h$. Тогда сумма площадей треугольников BEC и AED равна.

$$h \cdot \frac{BC}{2} + h \cdot \frac{AD}{2} = h \cdot \frac{BC + AD}{2}.$$



При этом площадь трапеции равна $2h \cdot \frac{BC + AD}{2}$, что как раз вдвое больше найденной суммы площадей треугольников.

Задание 25

Проверяемые умения

Уметь выполнять действия с геометрическими фигурами. Решать планиметрические задачи на нахождение геометрических величин. Различать взаимное расположение геометрических фигур на плоскости, изображать геометрические фигуры; выполнять чертежи по условию задачи. Проводить доказательные рассуждения при решении задач.

Типичные ошибки:

-доказательство верное, но записи небрежные

- присутствуют только отдельные факты, не связанные с тем, что необходимо доказать;
- неправильно понимают условие задания;
- используют неверные методы решения.

Критерии оценивания выполнения задания 25

Баллы	Содержание критерия
2	Ход решения верный, получен верный ответ
1	Ход решения верный, все его шаги присутствуют, но допущена описка или ошибка вычислительного характера
0	Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше
2	*Максимальный балл*

Задание № 26 (демоверсия ОГЭ – 2021)

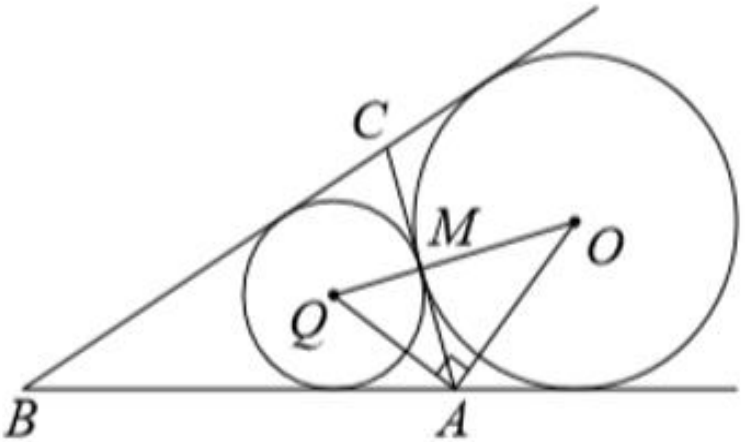
Основание AC равнобедренного треугольника ABC равно 12. Окружность радиусом 8 с центром вне этого треугольника касается продолжений боковых сторон треугольника и касается основания AC. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник ABC.

Решение.

Пусть O — центр данной окружности, а Q — центр окружности, вписанной в треугольник ABC.

Точка касания M окружностей делит AC пополам.

Лучи AQ и AO — биссектрисы смежных углов, значит, угол OAQ прямой.

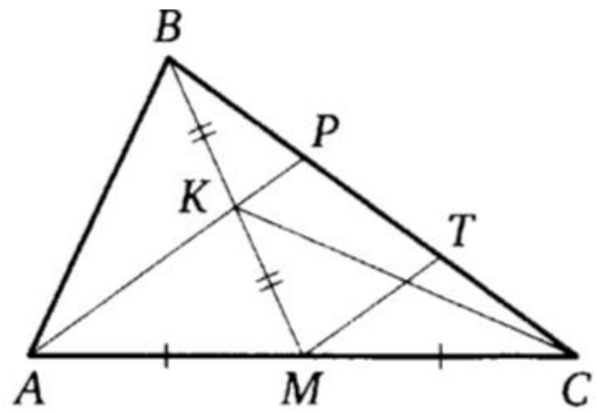


Из прямоугольного треугольника OAQ получаем: $AM^2 = MQ \cdot MO$. Следовательно,

$$QM = \frac{AM^2}{OM} = \frac{9}{2} = 4,5.$$

Ответ: 4,5.

Через середину K медианы BM треугольника ABC и вершину A проведена прямая, пересекающая сторону BC в точке P. Найдите отношение площади треугольника ABK к площади четырехугольника KPCM



Решение. Проведём $MT \parallel AP$. Тогда MT — средняя линия треугольника APC и $CT = TP$, а KP — средняя линия треугольника BMT и $TP = BP$. Обозначим площадь треугольника BKP через S. Тогда площадь треугольника KPC, имеющего ту же высоту и вдвое большее основание, равна $2S$. Значит, площадь треугольника CBK равна $3S$ и равна площади треугольника CMK, которая в свою очередь равна площади треугольника AMK. Площадь треугольника ABK равна площади треугольника AMK. Итак,

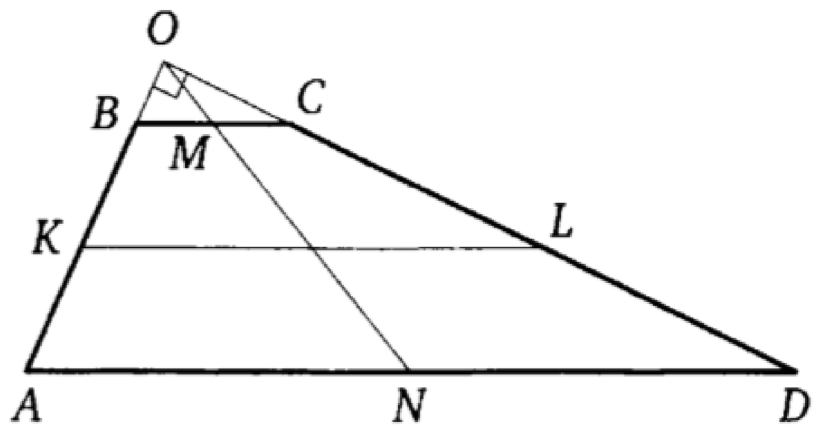
$$S_{BKP} = S, \quad S_{KPC} = 2S, \quad S_{CMK} = 3S = S_{AMK} = S_{ABK}, \quad S_{KPCM} = 5S.$$

Значит, $S_{ABK} : S_{KPCM} = 3 : 5$.

Ответ. $3 : 5$.

Углы при одном из оснований равны 77^0 и 13^0. Отрезки, соединяющие середины противоположных сторон трапеции, равны11 и 10. Найдите основания трапеции.

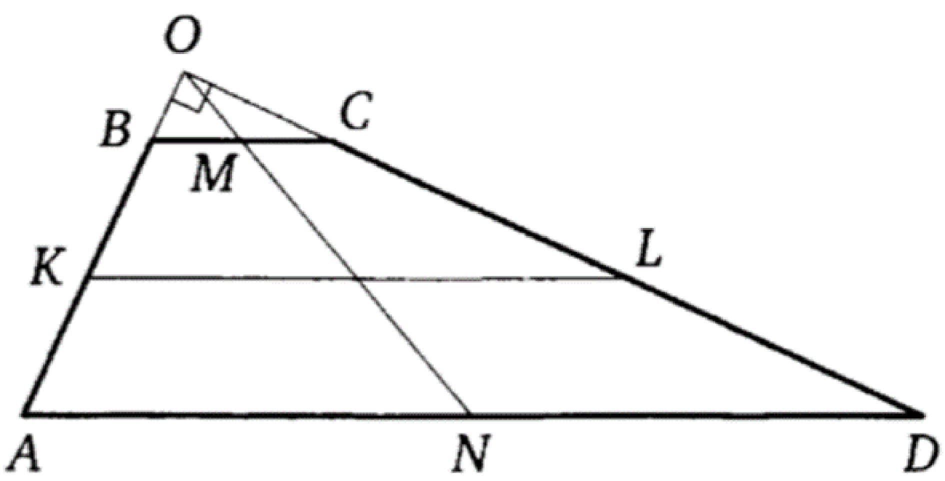
Решение. Пусть $ABCD$ — данная трапеция, AD — большее основание, K и L — середины сторон AB и CD соответственно. Сумма углов при одном из оснований равна $77° + 13° = 90°$, так что это большее основание AD.



Продлим боковые стороны до пересечения в точке О

Тогда $\angle AOD = 180° - (77° + 13°) = 90°.$

Пусть N — середина основания AD. Тогда $ON = \frac{AD}{2}$ — медиана прямоугольного треугольника AOD. Поскольку медиана ON делит пополам любой отрезок с концами на сторонах AO и DO треугольника AOD, параллельный стороне AD, она пересекает основание BC также в его середине M.

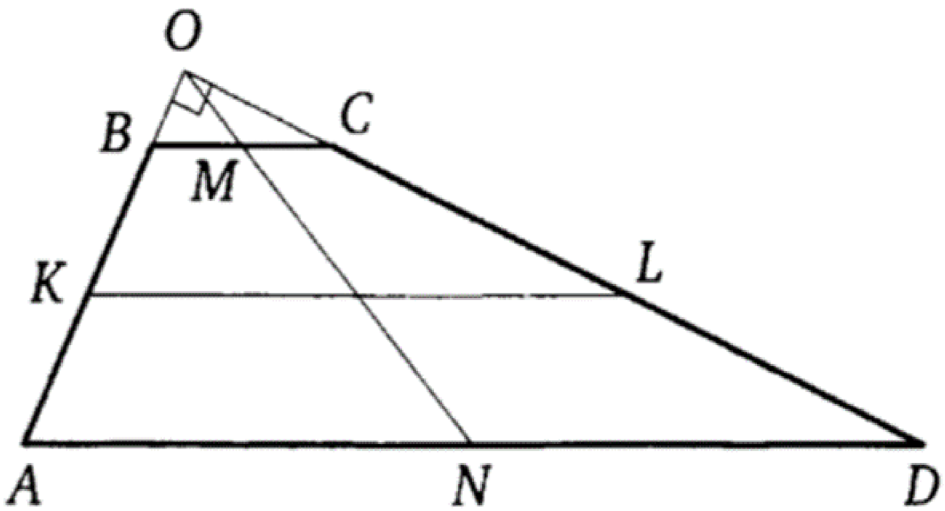


Значит, $OM = \frac{BC}{2}$. Таким образом, $MN = \frac{AD - BC}{2}$. Средняя линия KL трапеции при этом равна $\frac{AD + BC}{2}$.

Получаем

$$AD = MN + KL = 11 + 10 = 21, \quad BC = KL - MN = 11 - 10 = 1.$$

Ответ. 21; 1.



Геометрия полна приключений, потому что за каждой задачей скрывается приключение мысли. Решить задачу – это значит пережить приключение.

Вячеслав Викторович Произволов.