

Подготовка к ЕГЭ по математике
профильного уровня

задание 2.

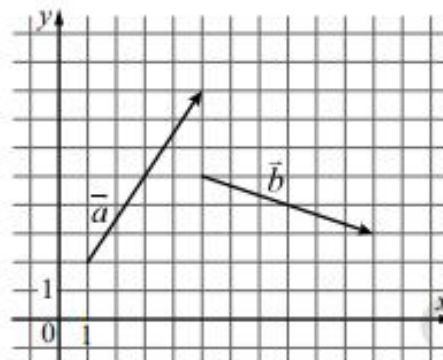
Векторы и операции с ними.

Тютина Лилия Шамилевна
учитель математики
МАОУ СОШ №38 города Тюмени

Код проверяемого требо-	Проверяемые требования к предметным результатам освоения основной образовательной программы среднего общего образования на основе изменённого в 2022 г. ФГОС	Уровень предметных требований ФГОС	Метапредметный результат	Обобщённые формулировки требований к предметным результатам из ФГОС 2012 г.
12	Умение оперировать понятиями: прямоугольная система координат, вектор, координаты точки, координаты вектора, сумма векторов, произведение вектора на число, разложение вектора по базису, скалярное произведение, векторное произведение, угол между векторами; умение использовать векторный и координатный метод для решения геометрических задач и задач других учебных предметов	БУ, УУ	МП 1.1; 1.3; 3.1; 3.2	Определять координаты точки; проводить операции над векторами, вычислять длину и координаты вектора, угол между векторами

Демонстрационный вариант ЕГЭ 2024 г. МАТЕМАТИКА, 11 класс. Профильный уровень. 5 / 23

2 На координатной плоскости изображены векторы \vec{a} и \vec{b} . Найдите скалярное произведение $\vec{a} \cdot \vec{b}$.



Ответ: _____.

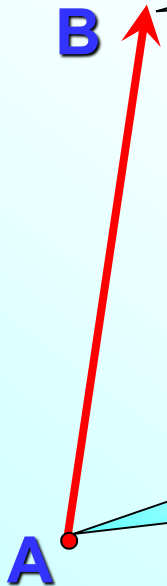
ИЛИ

Даны векторы $\vec{a}(1; 2)$, $\vec{b}(-3; 6)$ и $\vec{c}(4; -2)$. Найдите длину вектора $\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$.

Ответ: _____.

Отрезок, для которого указано, какая из его граничных точек считается началом, а какая – концом, называется **направленным отрезком или вектором**

Понятие вектора



**Конец
вектора**

**Начало
вектора**

Вектор

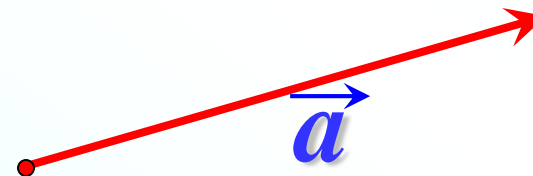
\vec{AB}

Вектор

\vec{BA}

Длиной или модулем вектора называется длина отрезка AB

$$|\vec{AB}| = AB$$



Вектор \vec{a}

Любая точка плоскости также является вектором.
В этом случае вектор называется **нулевым**



Вектор \vec{MM}

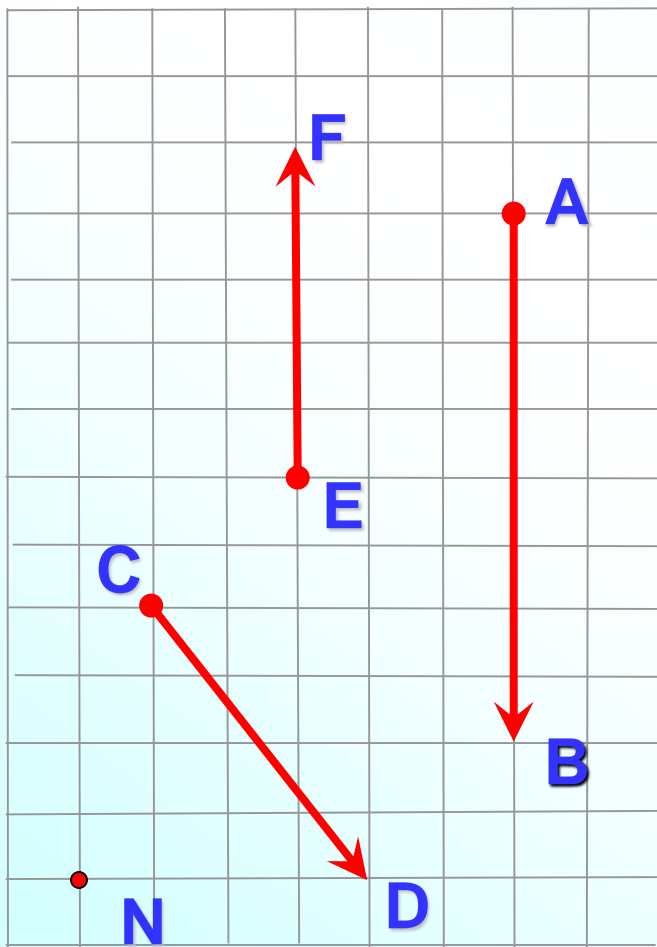
Вектор $\vec{0}$

Начало нулевого вектора совпадает с его концом, поэтому нулевой вектор не имеет какого-либо определенного направления. Иначе говоря, любое направление можно считать направлением нулевого вектора.

Длина нулевого считается равной нулю

$$|\vec{MM}| = 0$$

Назовите векторы, изображенные на рисунке.
Укажите начало и конец векторов.



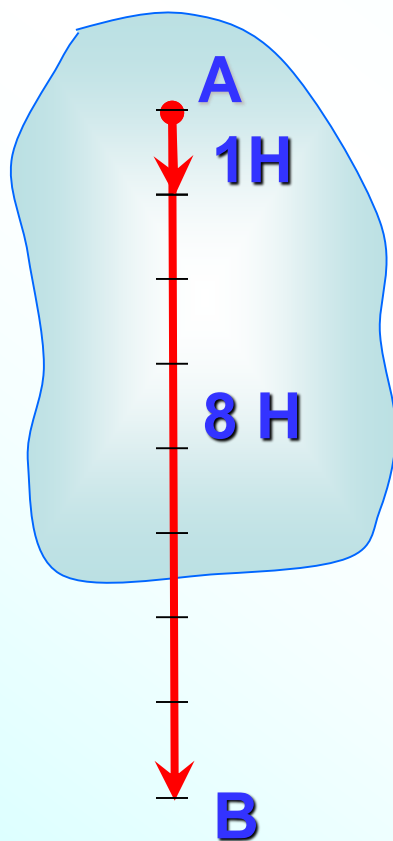
Вектор \vec{EF}

Вектор \vec{AB}

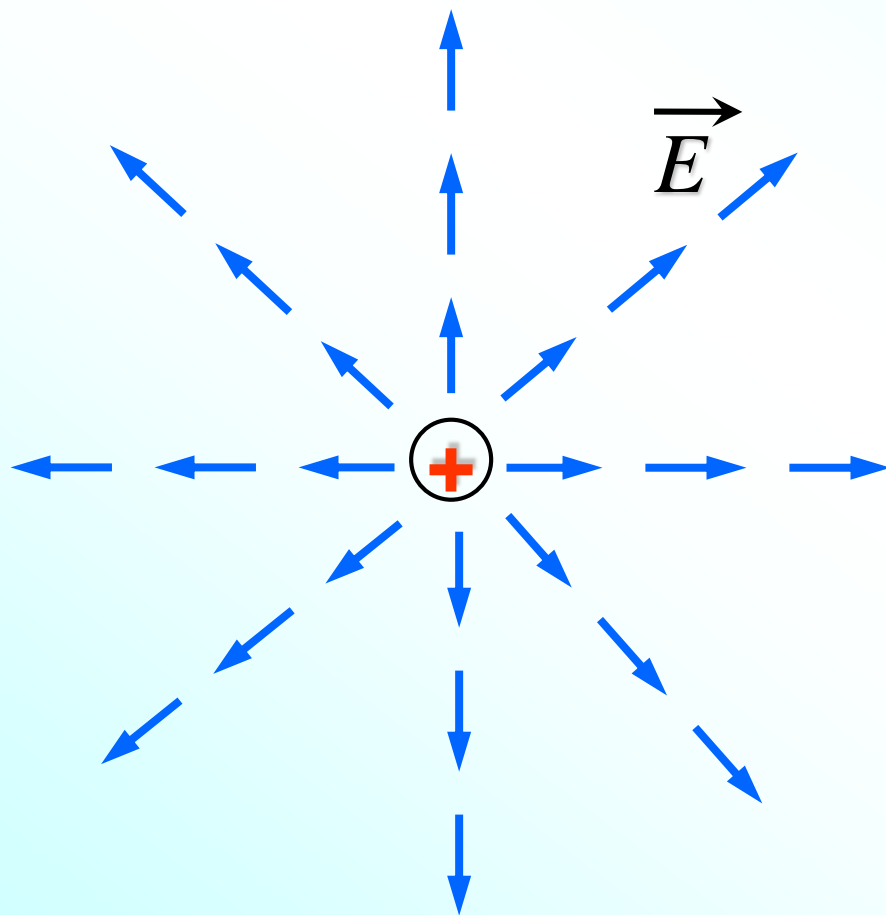
Вектор \vec{CD}

Вектор \vec{NN} или $\vec{0}$

Многие физические величины, например **сила, перемещение материальной точки, скорость**, характеризуются не только своим числовым значением, но и направлением в пространстве. Такие физические величины называются **векторными величинами** (или коротко **векторами**)



При изучении электрических и магнитных явлений появляются новые примеры векторных величин.

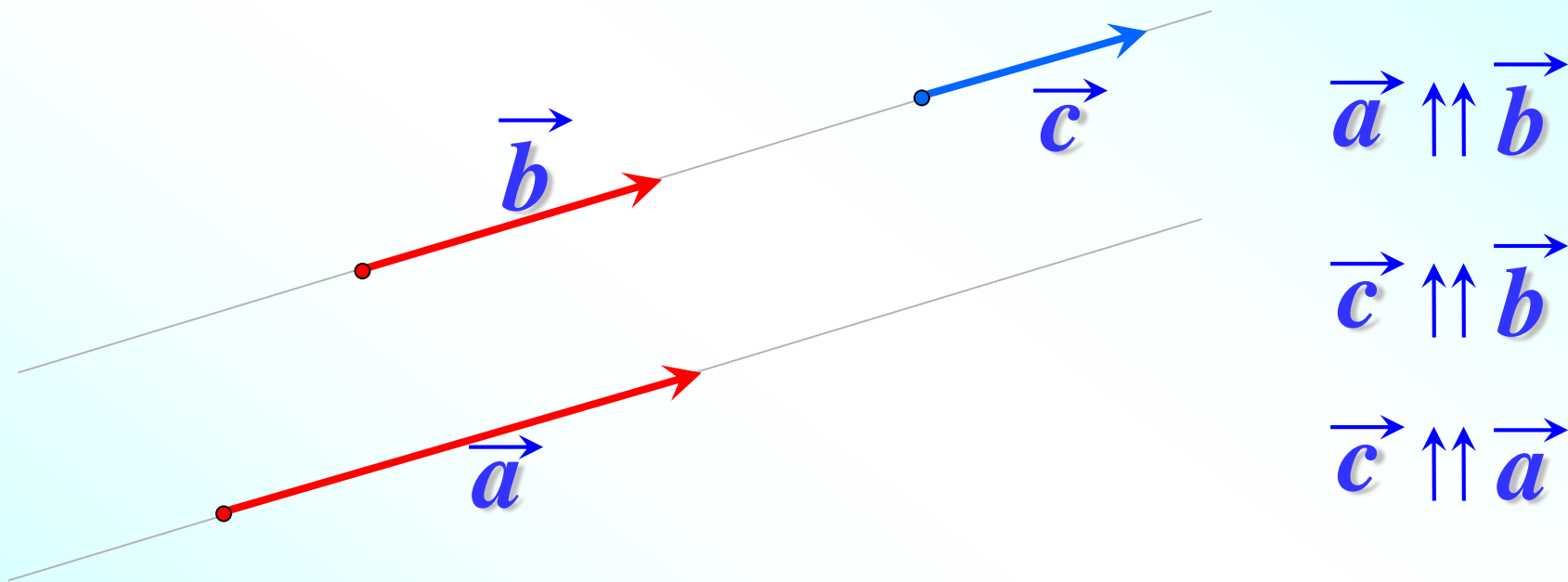


Электрическое поле, создаваемое в пространстве зарядами, характеризуется в каждой точке пространства вектором напряженности электрического поля.

На рисунке изображены векторы напряженности электрического поля положительного точечного заряда.

Два ненулевых вектора называются **коллинеарными**, если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых.

Коллинеарные, сонаправленные векторы



Нулевой вектор считается коллинеарным, сонаправленным с любым вектором.

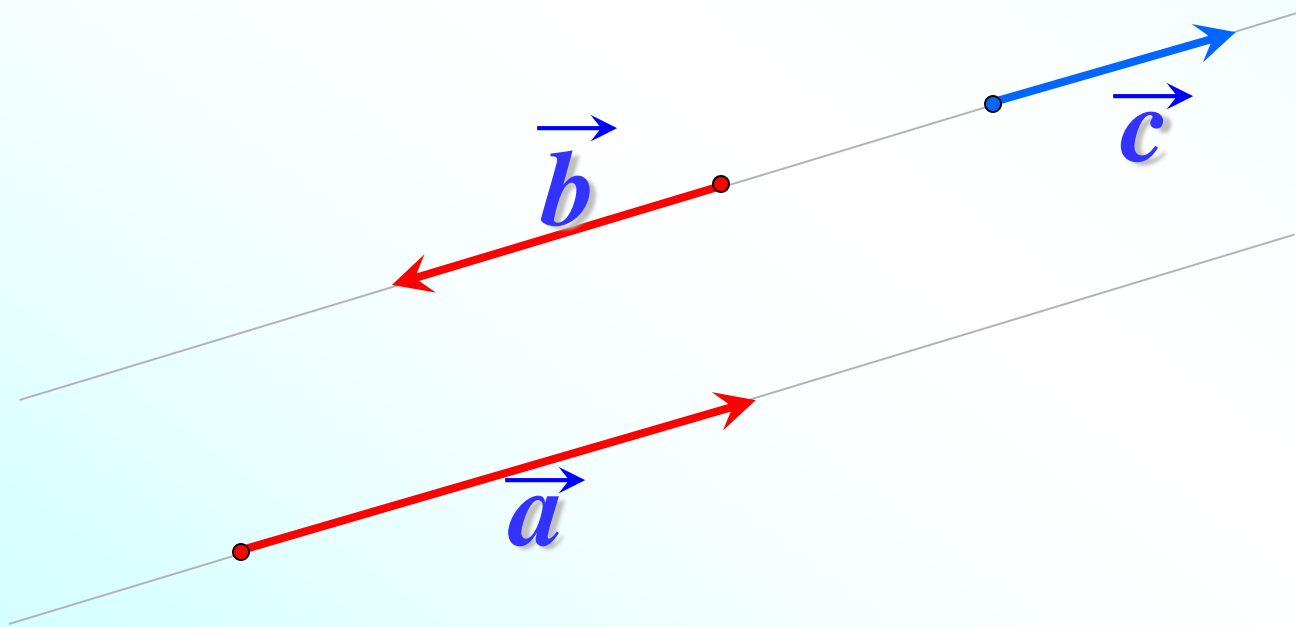
$$\vec{0} \parallel \vec{a}$$

$$\vec{0} \parallel \vec{c}$$

$$\vec{0} \parallel \vec{b}$$

Два ненулевых вектора называются **коллинеарными**, если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых.

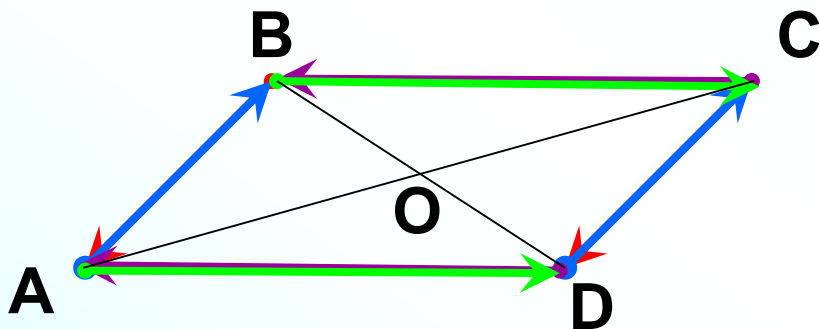
**Коллинеарные,
противоположно направленные векторы**



$$\vec{a} \updownarrow \vec{b}$$

$$\vec{c} \updownarrow \vec{b}$$

Векторы называются **равными**,
если они сонаправлены и их длины равны.



1 $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$

2 $|\vec{a}| = |\vec{b}|$

ABCD – параллелограмм.

$$\vec{BA} = \vec{CD};$$

$$\vec{AB} = \vec{DC};$$

$$\vec{CB} = \vec{DA};$$

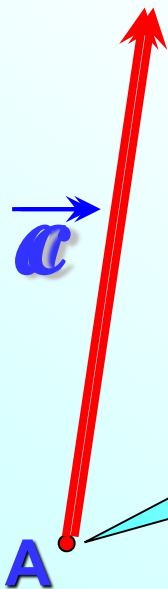
$$\vec{AD} = \vec{BC}.$$

Найдите еще пары равных векторов.
O – точка пересечения диагоналей.

Если точка A – начало вектора \vec{a} , то говорят, что

вектор \vec{a} отложен от точки A

От любой точки M можно отложить вектор, равный данному вектору \vec{a} , и притом только один.



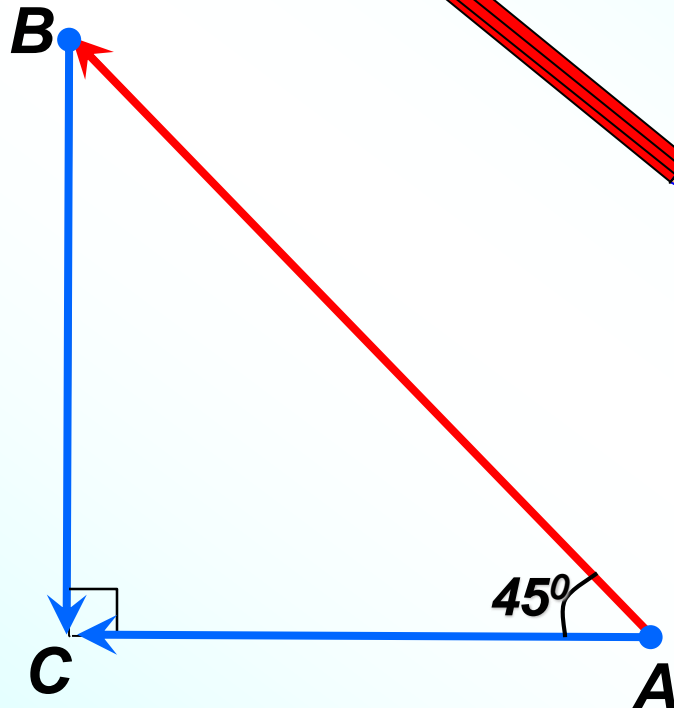
$$\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{c}$$

$$\vec{a} = \vec{c}$$

Вектор \vec{a} отложен от точки A
 $|\vec{a}| = |\vec{c}|$

M

Какая запись является верной?



~~$\vec{AB} > \vec{BC};$~~

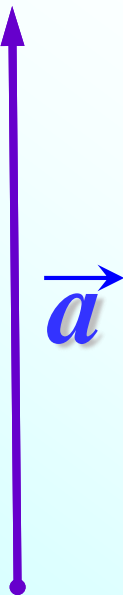
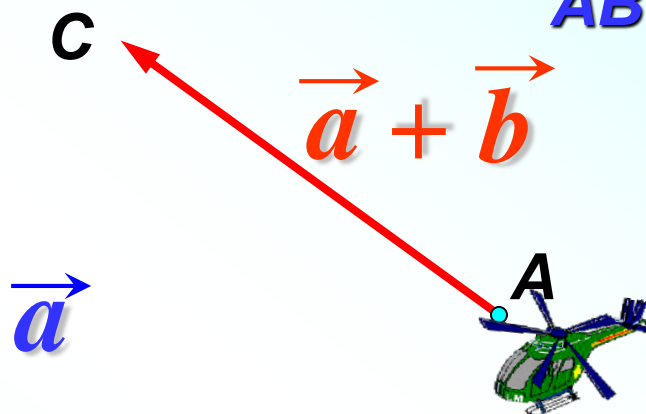
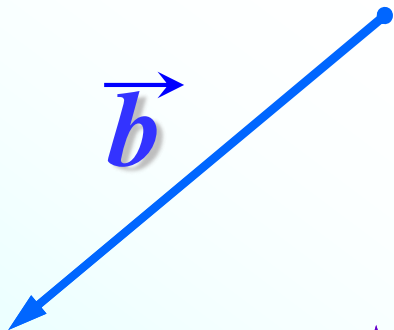
~~$|\vec{AB}| > |\vec{BC}|$~~

$|\vec{AC}| = |\vec{BC}|;$

~~$\vec{AC} = \vec{BC}$~~

Сложение векторов. Правило треугольника.

$$\vec{AB} + \vec{BC} \Leftrightarrow \vec{AC} \quad !$$



B

Для любого нулевого вектора справедливо равенство

$$\vec{a} + \vec{0} = \vec{a} \quad !$$

Правило треугольника.

$$\vec{AB} + \vec{BC} \Rightarrow \vec{AC}$$

$$\vec{AO} + \vec{OP} = \vec{AP}$$

$$\vec{MK} + \vec{KM} \Rightarrow \vec{MM} = \vec{0}$$

$$\vec{MK} + \vec{OM} \Rightarrow \vec{OM} + \vec{MK} = \vec{OK}$$



$$\vec{AS} + \vec{SC} = \vec{AC}$$

$$\vec{NM} + \vec{ML} = \vec{NL}$$

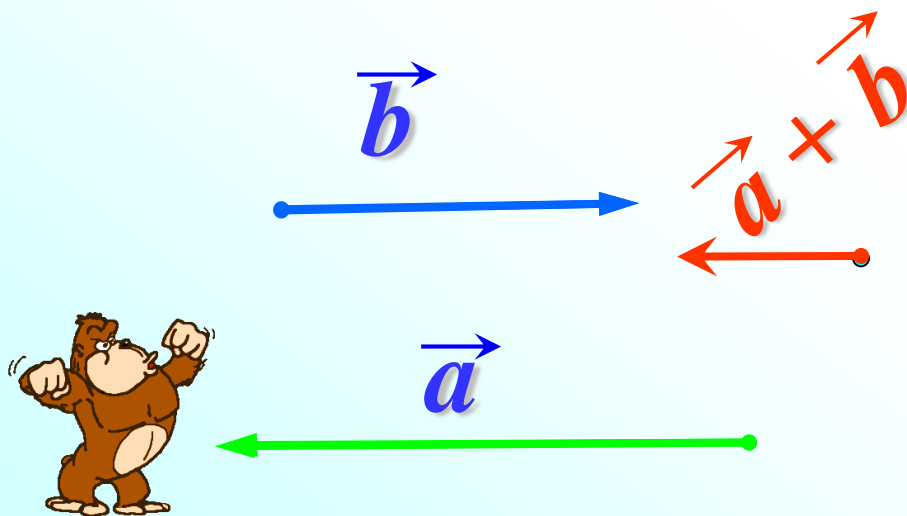
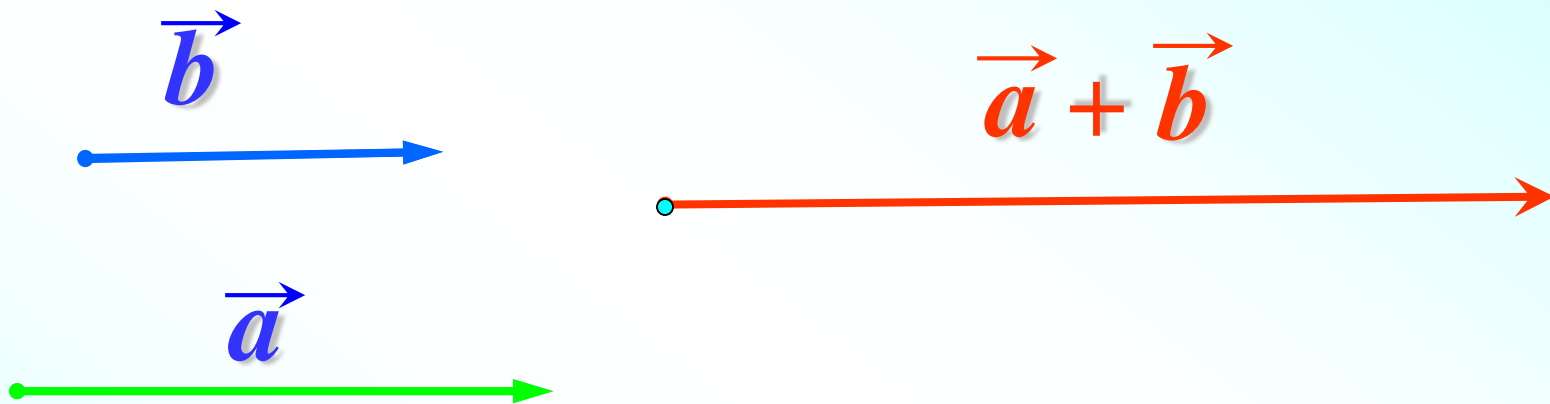
$$\vec{RP} + \vec{PR} = \vec{RR} = \vec{0}$$

$$\vec{ZK} + \vec{KZ} = \vec{ZZ} = \vec{0}$$

$$\vec{DE} + \vec{KD} = \vec{KD} + \vec{DE} = \vec{KE}$$

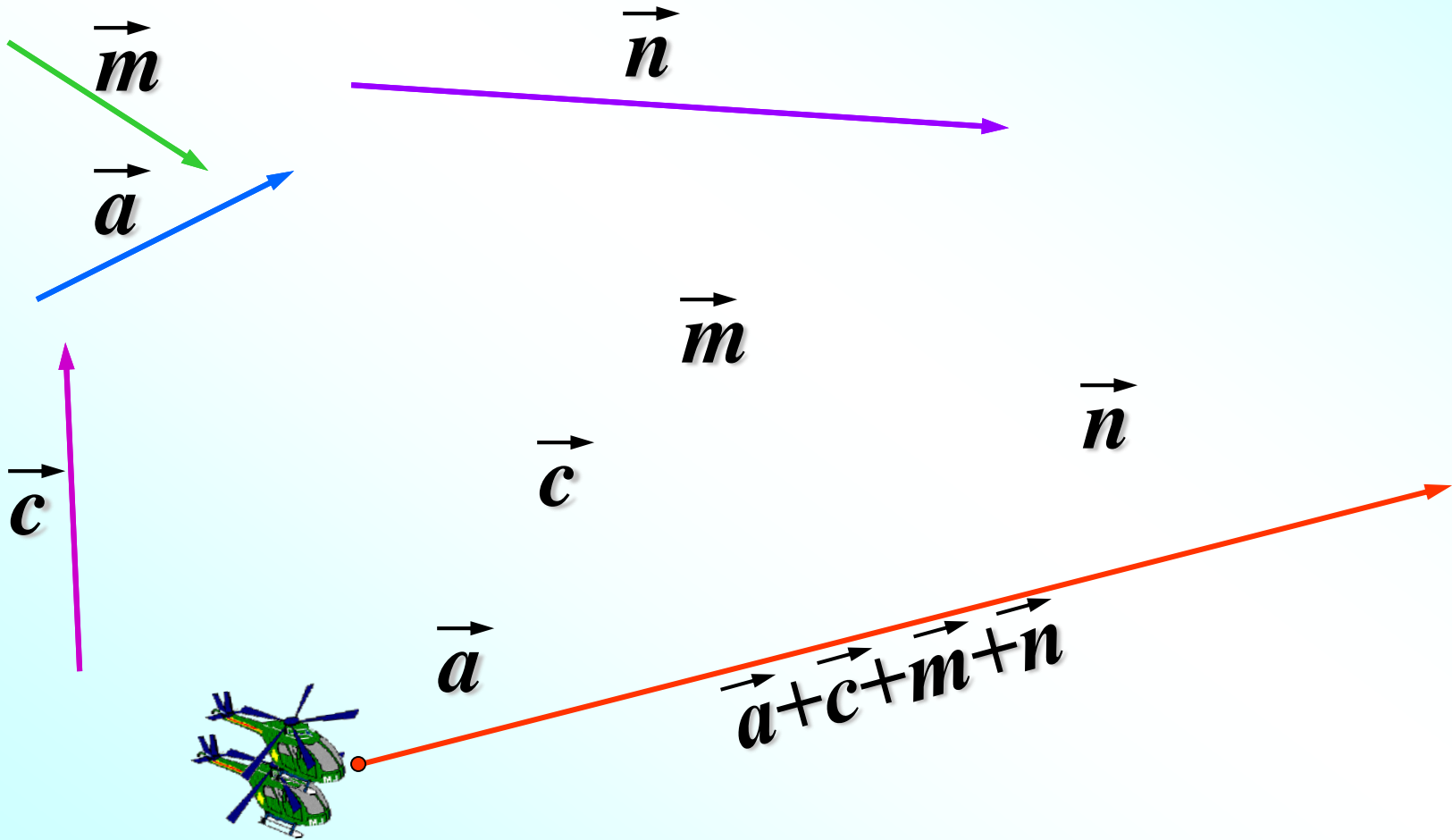
$$= \vec{KE}$$

По правилу треугольника складываются и коллинеарные векторы, хотя при их сложении треугольника и не получается

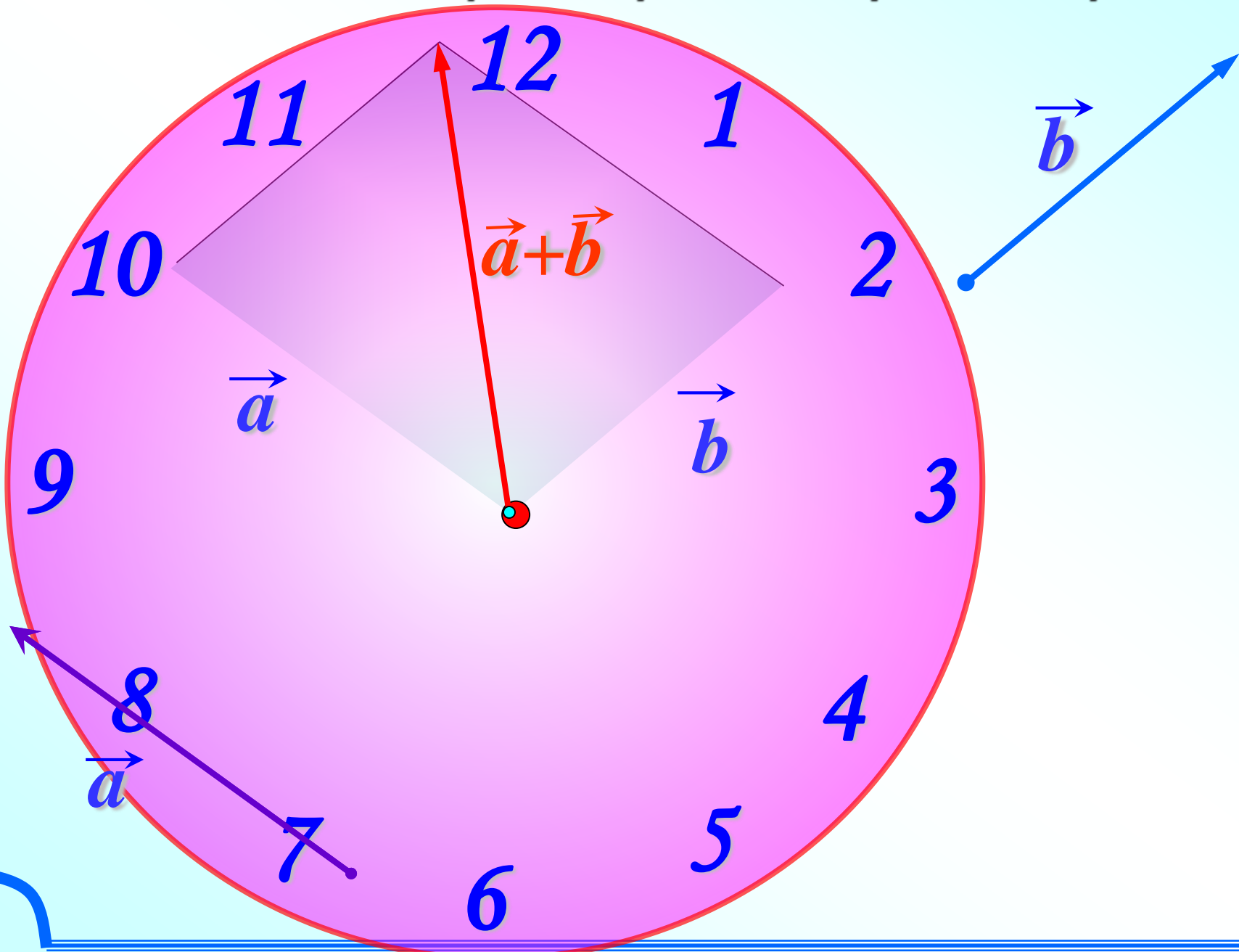


**Сложение векторов.
Правило многоугольника.**

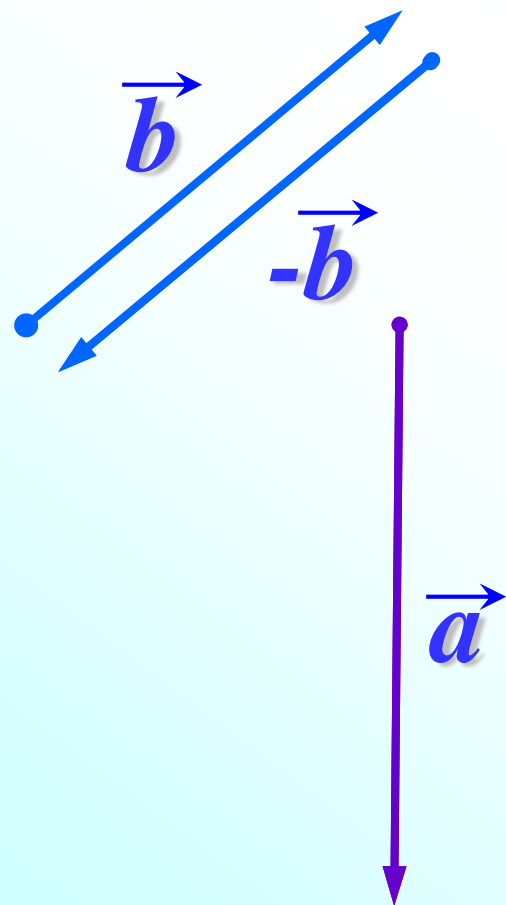
$$\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CD} + \vec{DO} = \vec{AO}$$



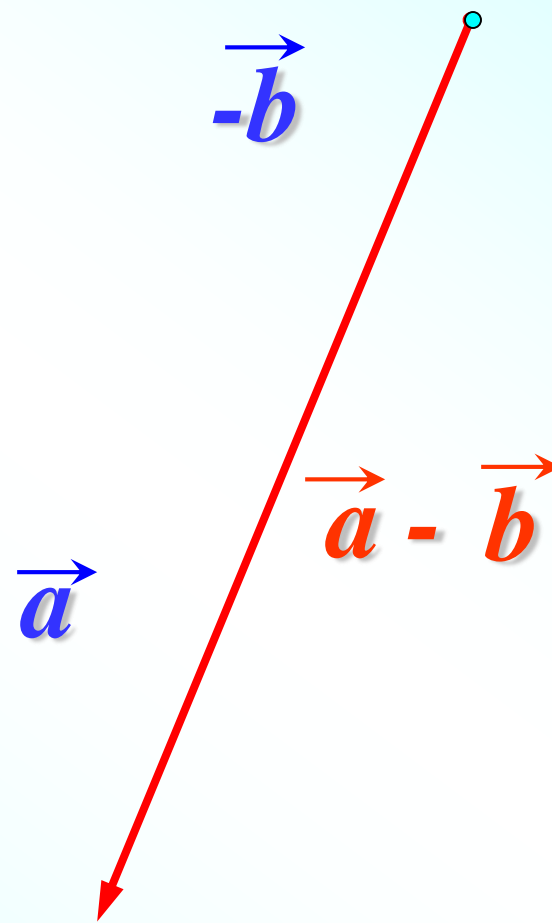
Сложение векторов. Правило параллелограмма.



**Вычитание
векторов.**



$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$$



Вычитание векторов.

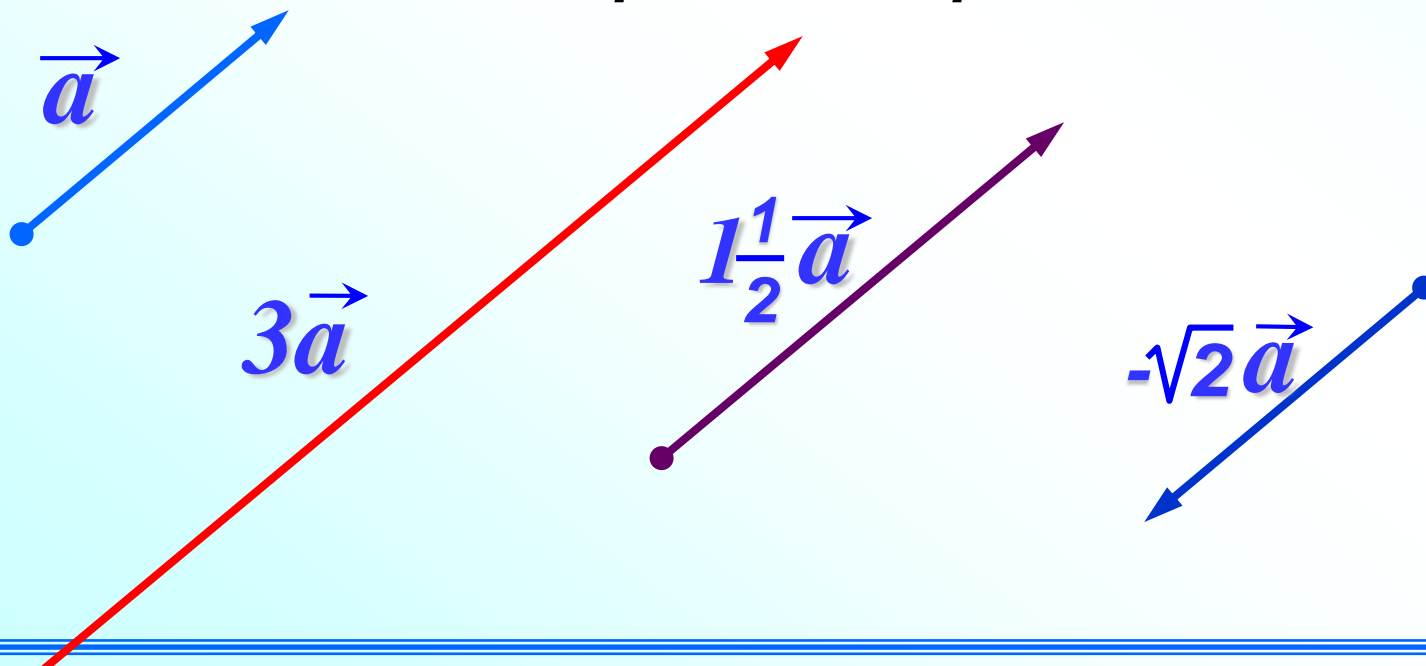
$$\vec{MF} - \vec{SF} = \vec{MF} + \vec{FS} = \vec{MS}$$

$$\vec{RO} - \vec{RM} = \vec{RO} + \vec{MR} = \vec{MR} + \vec{RO} = \vec{MO}$$

Умножение вектора на число.

Произведением ненулевого вектора \vec{a} на число k называется такой вектор \vec{b} , длина которого равна $|k| \cdot |\vec{a}|$

причем векторы \vec{a} и \vec{b} сонаправлены при $k \geq 0$ и противоположно направлены при $k < 0$.

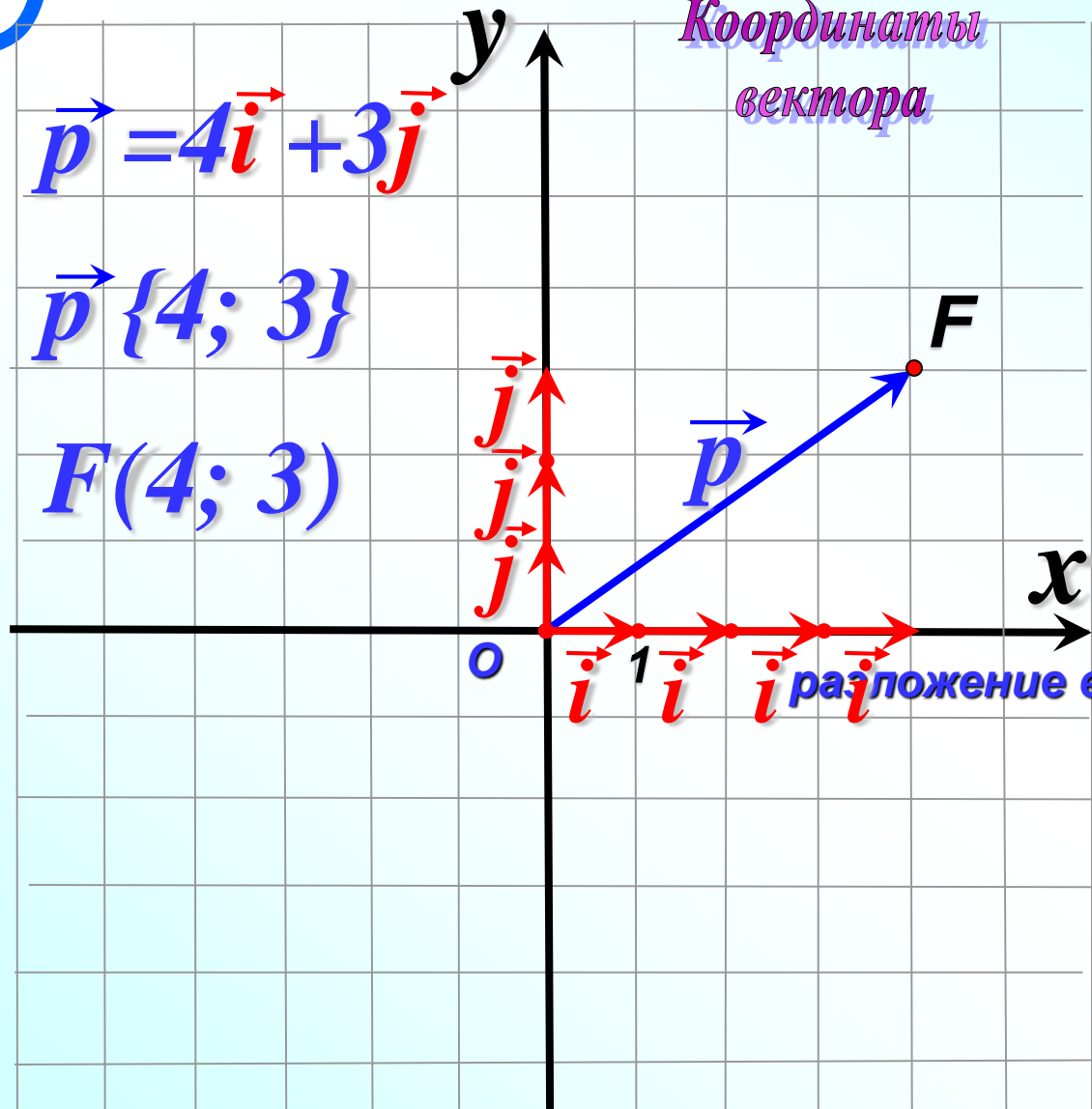


Координаты
вектора

$$\vec{p} = 4\vec{i} + 3\vec{j}$$

$$\vec{p} \{4; 3\}$$

$$F(4; 3)$$



\vec{i} и \vec{j}

координатные
векторы

$$|\vec{i}| = 1; \quad |\vec{j}| = 1$$

$$\vec{p} = x\vec{i} + y\vec{j}$$

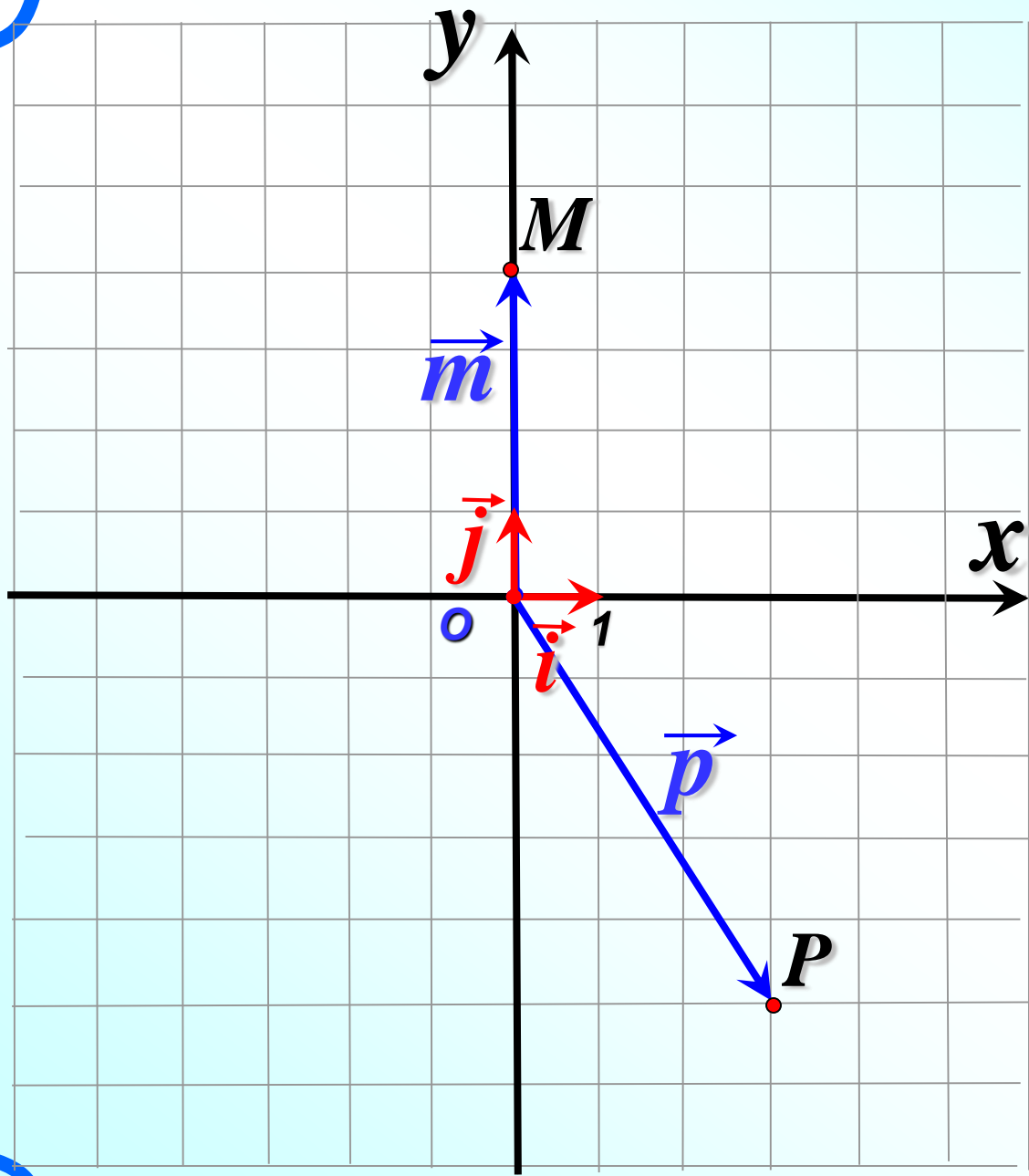
разложение вектора по координатным
векторам

$$\vec{p} \{x; y\}$$

координаты

вектора

Координаты радиус-вектора совпадают с
координатами конца вектора.



$$P (3;-5)$$

$$\vec{p} \{3;-5\}$$

$$\vec{p} = 3\vec{i} - 5\vec{j}$$

$$M (0;4)$$

$$\vec{m} \{0; 4\}$$

$$\vec{m} = 0\vec{i} + 4\vec{j}$$

$$\vec{m} = 4\vec{j}$$

Координаты вектора

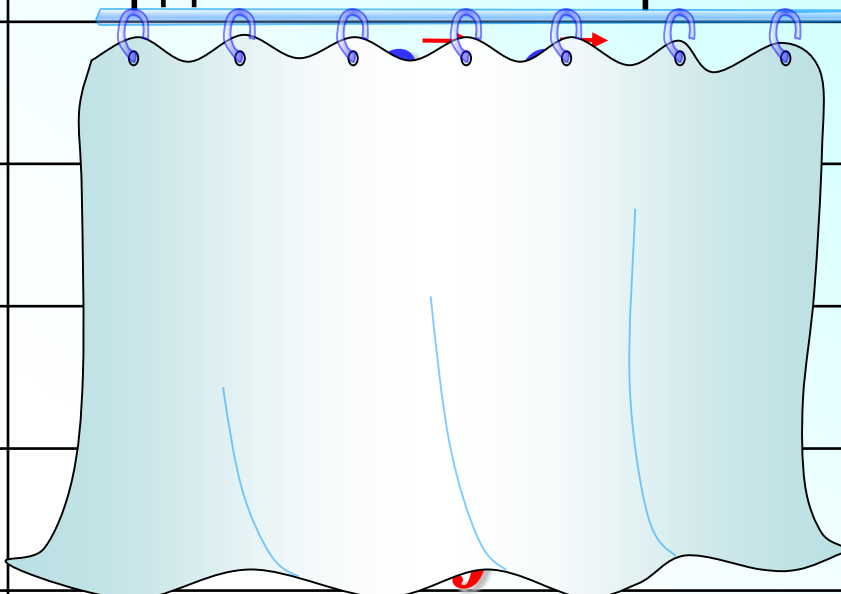
Разложение вектора по
координатным векторам

$$\vec{n} \{-2; 3\}$$

$$\vec{k} \{4; 2\}$$

$$\vec{m} \{3; -0,5\}$$

$$\vec{d} \{0; -5\}$$

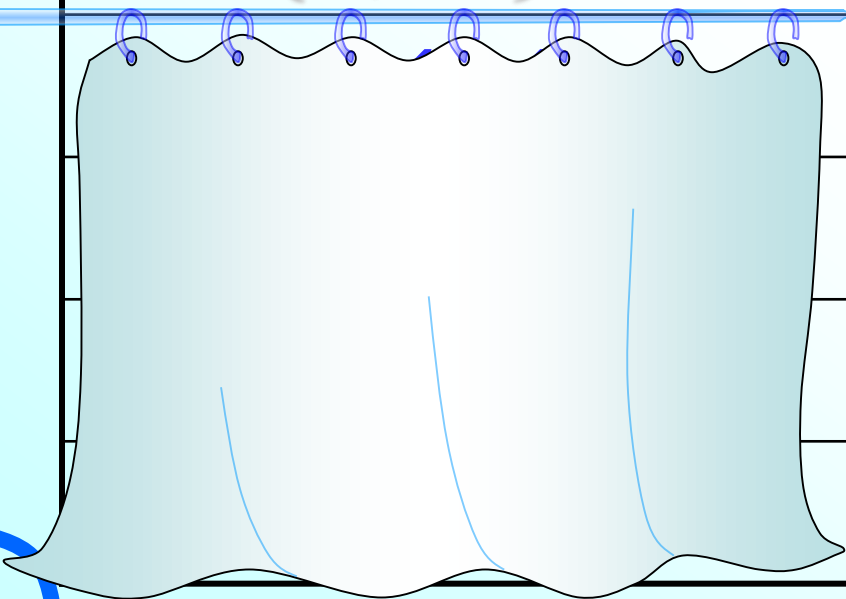


$$\vec{a} = -4\vec{i} + 4\vec{j}$$

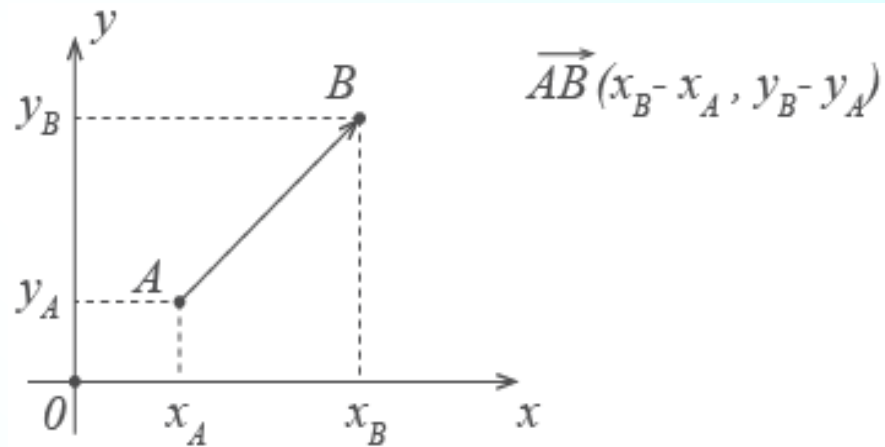
$$\vec{b} = 7\vec{j}$$

$$\vec{c} = -5\vec{i}$$

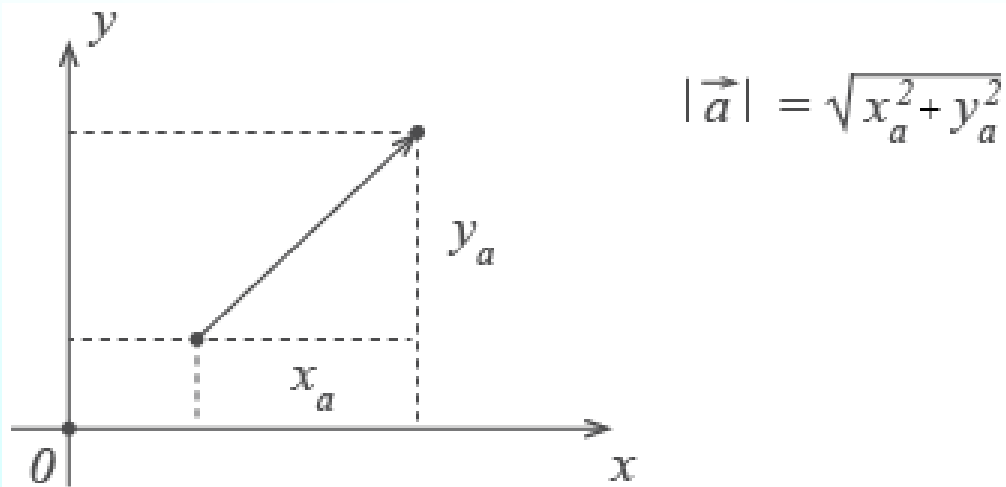
$$\vec{x} = 7\vec{i} - 7\vec{j}$$



координата конца вектора минус координата его начала.

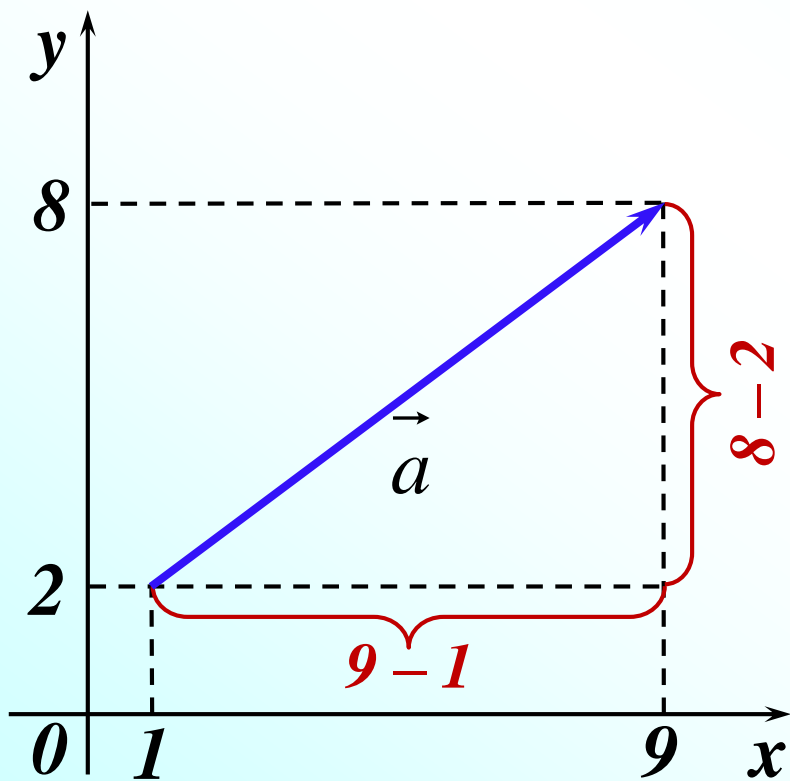


Если координаты вектора заданы, его длина находится по формуле



Дан вектор \vec{a} .

Найдите: 1) координаты вектора; 2) длину вектора.



Решение.

1) координаты вектора \vec{a} :

$$\vec{a}\{x_2 - x_1; y_2 - y_1\};$$

$$\vec{a}\{9 - 1; 8 - 2\};$$

$$\vec{a}\{8; 6\}.$$

2) длина вектора: $|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2};$

или: $|\vec{a}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2};$

$$|\vec{a}| = \sqrt{8^2 + 6^2} = \sqrt{100} = 10.$$

Ответ: 1) {8; 6}; 2) 10.

Рассмотрим векторы

$$\vec{a} \{x_1; y_1\}$$

и $\vec{b} \{x_2; y_2\}$

1⁰ Каждая координата суммы двух или более векторов равна сумме соответствующих координат этих векторов

$$\vec{a} + \vec{b} \{x_1 + x_2; y_1 + y_2\}$$

2⁰ Каждая координата разности двух векторов равна разности соответствующих координат этих векторов

$$\vec{a} - \vec{b} \{x_1 - x_2; y_1 - y_2\}$$

3⁰ Рассмотрим вектор

$$ka \{kx; ky\} \quad \vec{a} \{x; y\}$$

$$\vec{a} \{-2; 0\} / \cdot (-2)$$

$$-2\vec{a} \{4; 0\}$$

Найдите координаты вектора

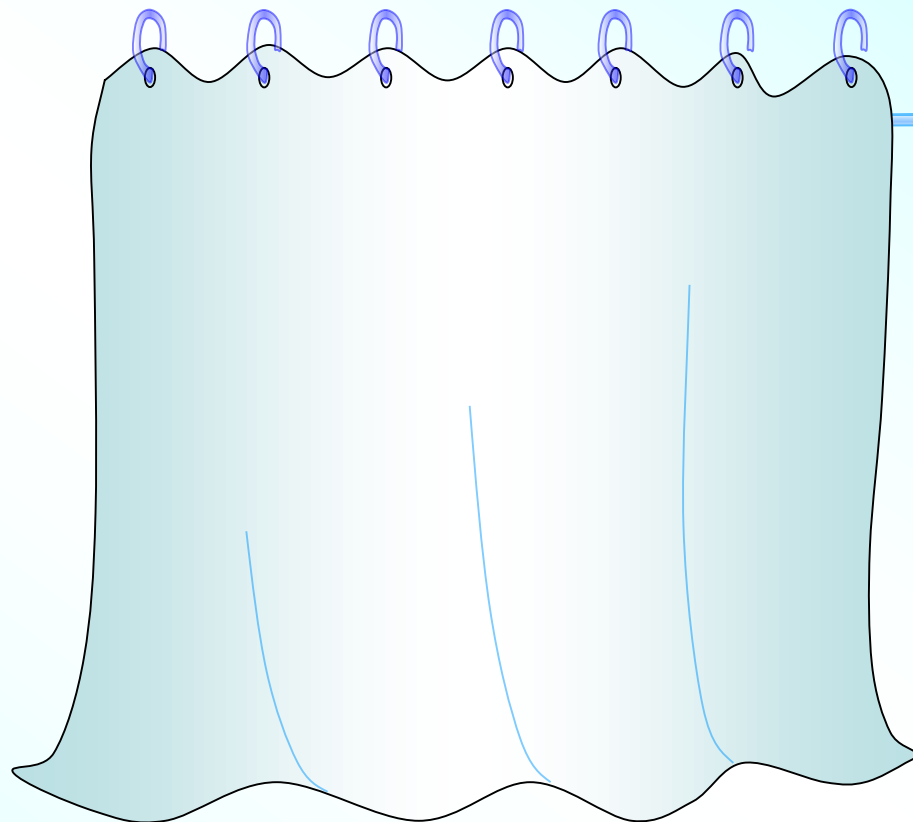
$$\begin{array}{r} \vec{a} \{-6; 9\} \\ + \\ \vec{n} \{-8; 0\} \\ \hline \end{array}$$

$$\vec{a} + \vec{n} \{-14; 9\}$$

No

$$\vec{a} \{3; 2\}; \quad \vec{b} \{2; 5\}$$

$$\vec{a} \{3; -4\}; \quad \vec{b} \{1; 5\}$$



Найти координаты векторов.

$$\vec{a} \{2; 4\}; \vec{c} \{3; 2\}; \quad \vec{a} + \vec{c} \{ \text{ } \}$$

$$\vec{b} \{-2; 0\}; \vec{d} \{-2; -3\}; \quad \vec{b} + \vec{d} \{ \text{ } \}$$

$$\vec{f} \{0; 5\}; \vec{d} \{-2; -3\}; \quad \vec{f} - \vec{d} \{ \text{ } \}$$

Вводите ответы в текстовые поля, не делая пробелов

Проверить.

Даны векторы
Найдите
координаты векторов

$$\vec{a}\{2;-4\} \text{ и } \vec{b}\{-5;3\}$$

$$\vec{m} = \underbrace{4\vec{a}} - \underbrace{2\vec{b}} \quad \text{и} \quad \vec{n} = \underbrace{3\vec{a}} - \underbrace{4\vec{b}}$$

$$\begin{array}{l} / \cdot 4 \\ / \cdot (-2) \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 4\vec{a}\{8;-16\} \\ + \\ -2\vec{b}\{10;-6\} \end{array}$$

$$4\vec{a} - 2\vec{b}\{18;-22\}$$

$$\begin{array}{l} / \cdot 3 \\ / \cdot (-4) \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 3\vec{a}\{6;-12\} \\ + \\ -4\vec{b}\{20;-12\} \end{array}$$

$$3\vec{a} - 4\vec{b}\{26;-24\}$$

Условия коллинеарности векторов

Два вектора \bar{a} и \bar{b} будут коллинеарны при выполнении любого из следующих условий.

Условие коллинеарности 1. Два вектора \bar{a} и \bar{b} коллинеарны, если существует такое число λ , что

$$\bar{a} = \lambda \bar{b}$$

Условие коллинеарности 2. Два вектора \bar{a} и \bar{b} коллинеарны, если отношения их координат равны:

$$\bar{a} = (a_1; a_2), \quad \bar{b} = (b_1; b_2) \Rightarrow \bar{a} \parallel \bar{b} \Leftrightarrow \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2}$$

ЗАМЕЧАНИЕ

Это условие неприменимо, если одна из координат вектора равна нулю.

ПРИМЕР

Задание При каком значении параметра m вектора $\bar{a} = (1; 2)$ и $\bar{b} = (-1; m)$ коллинеарны?

Решение Согласно второму условию коллинеарности, рассматриваемые вектора будут коллинеарными, если их координаты будут пропорциональными, то есть

$$\frac{1}{-1} = \frac{2}{m}$$

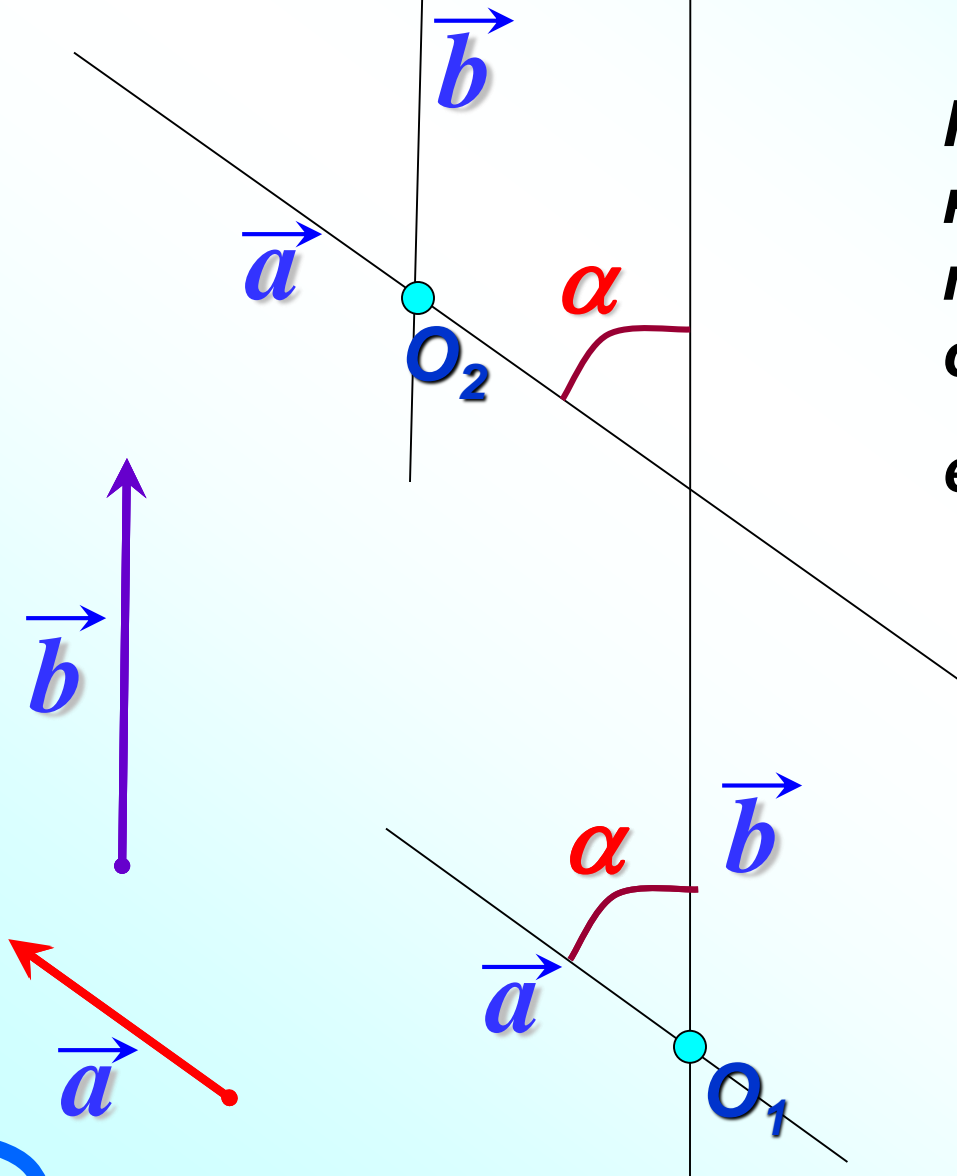
Откуда

$$m = -2$$

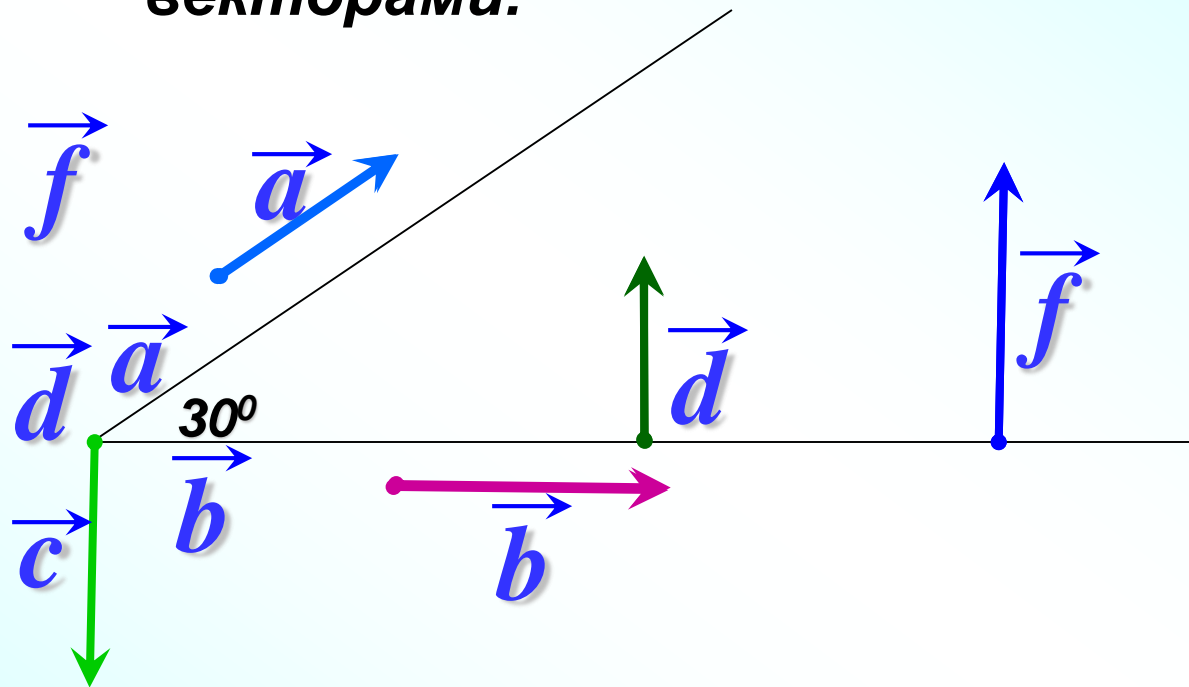
Ответ $m = -2$

Угол между векторами

Градусная мера угла α не зависит от выбора точки O , от которой откладывают векторы \vec{a} и \vec{b}



Найти углы между векторами.



$$\widehat{\vec{a} \vec{b}} = 30^\circ$$

$$\widehat{\vec{a} \vec{c}} = 120^\circ$$

$$\widehat{\vec{b} \vec{c}} = 90^\circ$$

$$\widehat{\vec{d} \vec{c}} = 180^\circ$$

$$\widehat{\vec{d} \vec{f}} = 0^\circ$$

Два вектора называются перпендикулярными, если угол между ними равен 90° .

$$\vec{b} \perp \vec{c}$$

$$\vec{b} \perp \vec{d}$$

$$\vec{b} \perp \vec{f}$$

**Сумма векторов –
вектор.**

**Разность векторов –
вектор.**

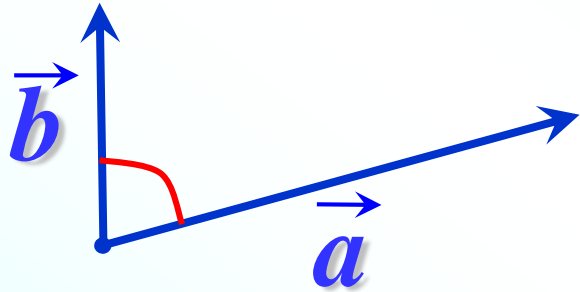
Произведение вектора на число – вектор.

Скалярное произведение векторов – число.

**Скалярным произведением двух векторов
называется произведение их длин на косинус
угла между ними.**

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos(\widehat{\vec{a} \vec{b}})$$

$$\widehat{\vec{a} \vec{b}} < 90^\circ$$



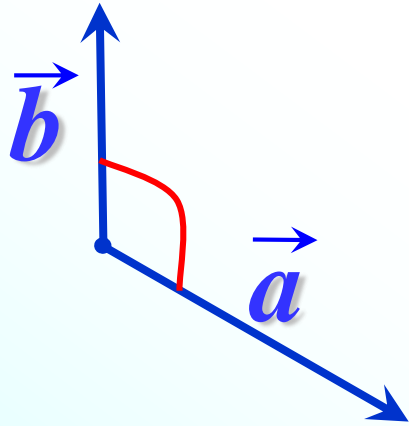
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \alpha > 0$$

Скалярное произведение ненулевых векторов положительно тогда и только тогда, когда угол между векторами *острый*.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} > 0$$

$$\widehat{\vec{a} \vec{b}} < 90^\circ$$

$$\widehat{\vec{a} \vec{b}} > 90^\circ$$

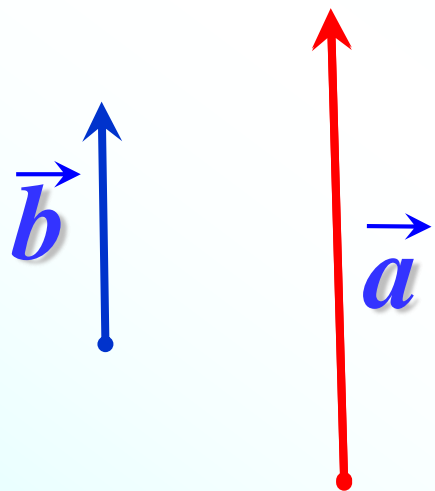


$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \alpha < 0$$

Скалярное произведение ненулевых векторов отрицательно тогда и только тогда, когда угол между векторами **тупой**.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} < 0$$

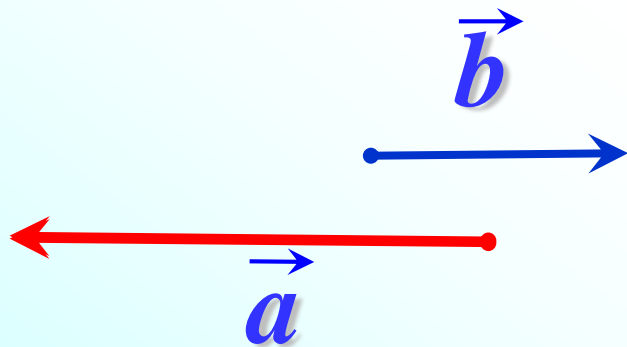
$$\widehat{\vec{a} \vec{b}} > 90^\circ$$



Если $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$

$$\widehat{\vec{a} \vec{b}} = 0^\circ$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \overset{1}{\cos 0^\circ} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$$



Если $\vec{a} \downarrow\uparrow \vec{b}$

$$\widehat{\vec{a} \vec{b}} = 180^\circ$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \overset{-1}{\cos 180^\circ} = -|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$$

Маленький тест

$$\vec{BC} \cdot \vec{BA} = |\vec{BC}| \cdot |\vec{BA}| \cos \widehat{BC, BA} = 6 \cdot 3 \cos 60^\circ = 18 \cdot \frac{1}{2}$$

1

$9\sqrt{3}$

ПОДУМАЙ

!

2

9

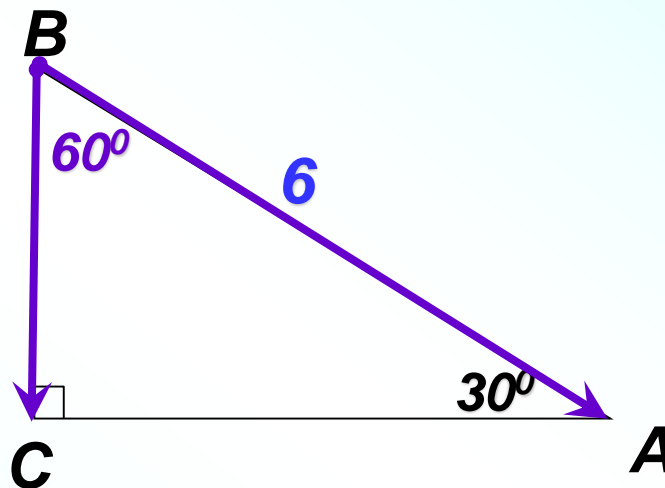
ВЕРНО!

3

18

ПОДУМАЙ

!



Проверка



Найдите угол между векторами \vec{m} и \vec{n} , если

$$\vec{m} \cdot \vec{n} = -15, \quad |\vec{m}| = 5, \quad |\vec{n}| = 6.$$

1

50°

ПОДУМАЙ

!

2

60°

ПОДУМАЙ

!

3

120°

ВЕРНО!

Скалярное произведение ненулевых векторов отрицательно тогда и только тогда, когда угол между векторами **тупой**

Проверка



Теорема Скалярное произведение векторов

$$\vec{a} \{x_1; y_1\} \text{ и } \vec{b} \{x_2; y_2\}$$

выражается формулой $\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2$

Следствие 1

Ненулевые векторы \vec{a} и \vec{b} перпендикулярны тогда и только тогда, когда

$$\vec{a} \perp \vec{b}$$

$$x_1x_2 + y_1y_2 = 0$$

Пример

$$\vec{b} \{-2; 1\}$$

$$\vec{d} \{2; 4\}$$

$$\cdot + \cdot = 0$$

$$\vec{b} \perp \vec{d}$$

Следствие 2

Косинус угла между ненулевыми векторами \vec{a} и \vec{b} выражается формулой

$$\cos \alpha = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2}}$$

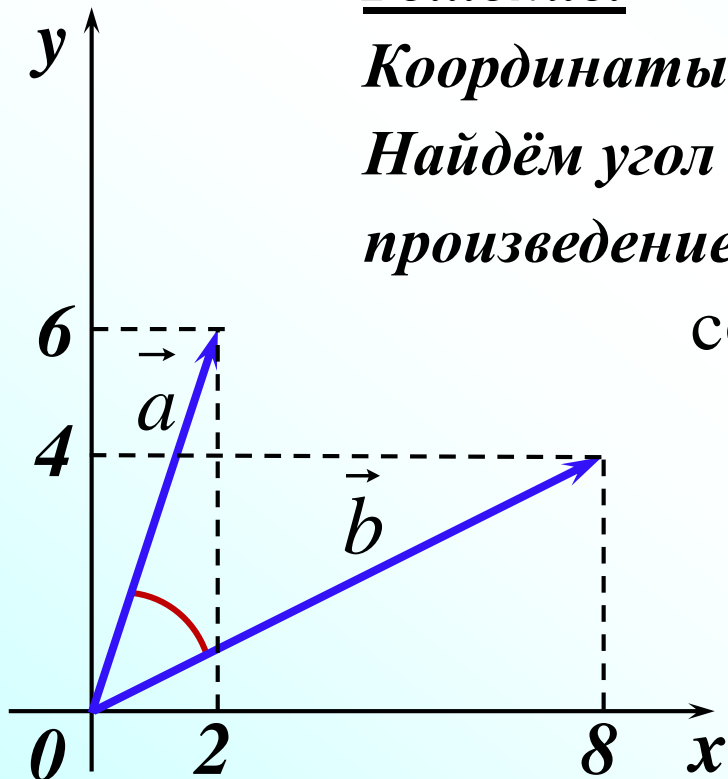
Найдите угол между векторами \vec{a} и \vec{b} .

Ответ дайте в градусах.

Решение.

Координаты векторов \vec{a} и \vec{b} : $\vec{a}\{2; 6\}$; $\vec{b}\{8; 4\}$

Найдём угол между ними через скалярное произведение:



$$\begin{aligned}\cos\varphi &= \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2}} \\ &= \frac{2 \cdot 8 + 6 \cdot 4}{\sqrt{2^2 + 6^2} \cdot \sqrt{8^2 + 4^2}} = \frac{40}{\sqrt{40} \cdot \sqrt{80}} \\ &= \frac{40}{\sqrt{3200}} = \frac{40}{40\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow\end{aligned}$$

Ответ: 45.

$$\Rightarrow \varphi = 45^\circ$$

Найдите абсциссу вектора \vec{d} , если известно, что

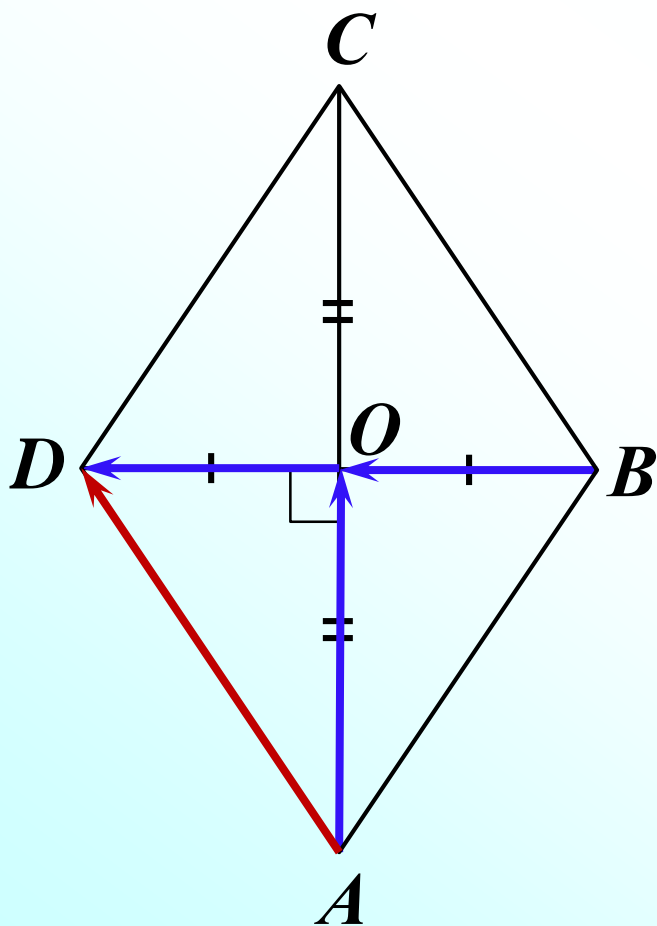
$$\vec{b} \{-2; 1\} \quad \vec{d} \{x; 4\} \quad \vec{b} \perp \vec{d}$$

$$\cdot + \cdot = 0$$

$$x = 2$$

$$* \quad \vec{b} \perp \vec{d} \quad x_1x_2 + y_1y_2 = 0$$

Диагонали ромба $ABCD$ пересекаются в точке O и равны 12 и 16. Найдите длину вектора $\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{BO}$.



Решение.

По правилу треугольника:

$$\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{BO} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{AD}$$

Найдём длину AD из п/у $\triangle AOD$
(т.к. $ABCD$ – ромб, то $AC \perp BD$
и $BO = OD = 6$, $AO = OC = 8$)

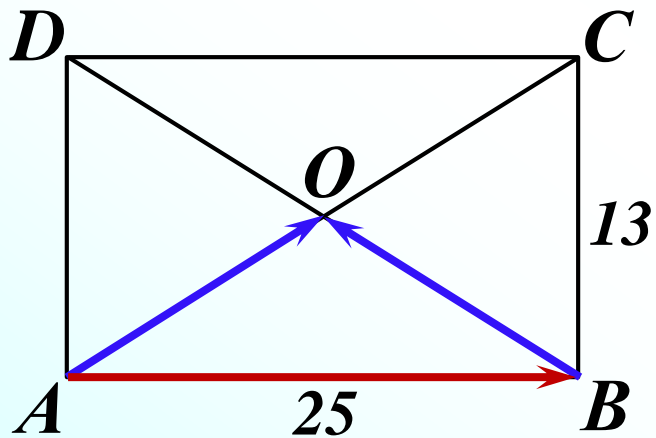
$$|\overrightarrow{AD}|^2 = AD^2 = AO^2 + OD^2$$

$$AD^2 = 8^2 + 6^2 = 100$$

$$AD = \sqrt{100} = 10$$

Ответ: 10.

Две стороны прямоугольника равны 13 и 25. Диагонали пересекаются в точке O . Найдите длину разности векторов \overrightarrow{AO} и \overrightarrow{BO} .



Решение.

По правилу треугольника:

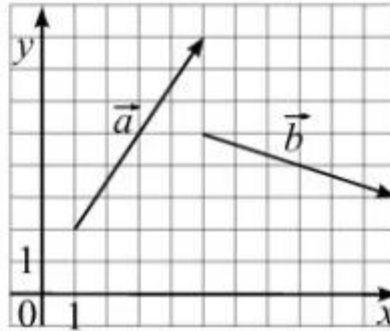
$$\overrightarrow{AO} - \overrightarrow{BO} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{AB}$$

$$|\overrightarrow{AB}| = 25$$

Ответ: 25.

Решение задания из демоварианта

2 На координатной плоскости изображены векторы \vec{a} и \vec{b} . Найдите скалярное произведение $\vec{a} \cdot \vec{b}$.



Решение

1. Найдём координаты вектора \vec{a} . Для этого вычтем из координат конечной точки вектора соответствующие координаты начальной точки:
 $\vec{a}(5 - 1; 8 - 2) = \vec{a}(4; 6)$.

2. Аналогично находим координаты вектора \vec{b} :
 $\vec{b}(11 - 5; 3 - 5) = \vec{b}(6; -2)$.

3. Находим скалярное произведение этих векторов как сумму произведений соответствующих координат:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 4 \cdot 6 + 6 \cdot (-2) = 24 - 12 = 12.$$

Ответ: 12.

Решение задания из демоварианта

2 Даны векторы $\vec{a}(1; 2)$, $\vec{b}(-3; 6)$ и $\vec{c}(4; -2)$. Найдите длину вектора $\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$.

Решение

1. Найдём координаты вектора $\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$. Для этого выполним заданные арифметические операции над соответствующими координатами этих векторов:

$$\vec{a} - \vec{b} + \vec{c} = (1 - (-3) + 4; 2 - 6 + (-2)) = (1 + 3 + 4; 2 - 6 - 2) = (8; -6).$$

2. Длина вектора равна квадратному корню из суммы квадратов его координат. Найдём длину вектора с координатами $(8; -6)$:

$$\sqrt{8^2 + (-6)^2} = \sqrt{64 + 36} = \sqrt{100} = 10.$$

Ответ: 10.

На координатной плоскости изображены векторы \vec{a} , \vec{b} и \vec{c} . Найдите длину вектора $\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$.

Решение.

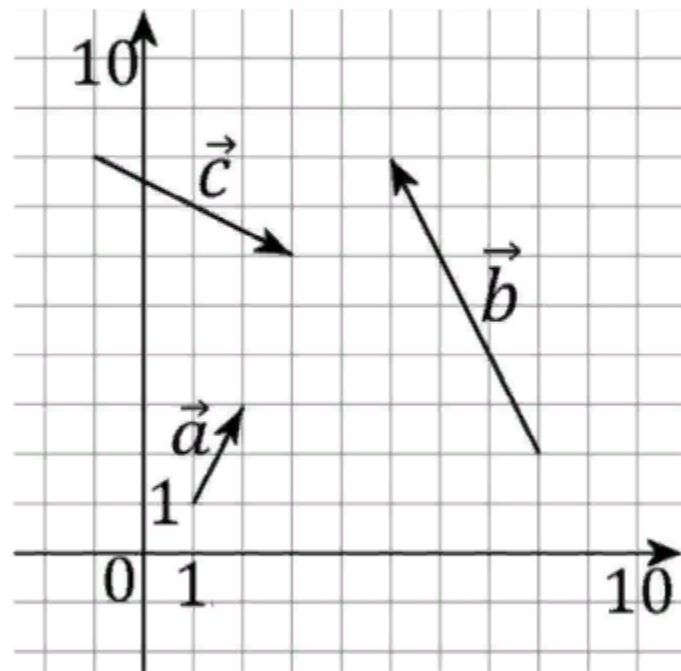
По картинке координаты вектора $\vec{a}(1; 2)$,
координаты вектора $\vec{b}(-3; 6)$ и вектора $\vec{c}(4; -2)$.

Найдем координаты вектора $\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$

$$(1; 2) - (-3; 6) + (4; -2) = (8; -6).$$

Найдем длину

$$|\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}| = \sqrt{8^2 + (-6)^2} = \sqrt{100} = 10.$$



Ответ: 10.

Даны векторы $\vec{a}(2; -1)$, $\vec{b}(1; 3)$ и $\vec{c}(6; x)$. Длина вектора $2\vec{a} + 2\vec{b} - \vec{c}$ равна 5. Найдите x , если известно, что $x > 0$.

Решение.

Найдем координаты вектора $2\vec{a} + 2\vec{b} - \vec{c}$

$$2 \cdot (2; -1) + 2 \cdot (1; 3) - (6; x) = (0; 4 - x).$$

Найдем длину

$$5 = |2\vec{a} + 2\vec{b} - \vec{c}| = \sqrt{0^2 + (4 - x)^2} \Leftrightarrow |4 - x| = 5 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 9 \end{cases}.$$

Так как $x > 0$, то $x = 9$.

Ответ: 9.