Решение задач базового и повышенного уровня

«Функции их графики»

Тютина Лилия Шамилевна –
учитель математики

Задание №11, №22

Уметь строить и читать графики функций

Определять координаты точки плоскости, строить точки с заданными координатами

Определять значение функции по значению аргумента при различных способах задания функции, решать обратную задачу

Определять свойства функции по её графику (промежутки возрастания, убывания, промежутки знакопостоянства, наибольшее и наименьшее значения)

Строить графики изученных функций, описывать их свойства

Рассматриваются

- ✓ линейные функции, в т. ч. прямой пропорциональной зависимости,
- ✓ квадратичные функции
- ✓ функции обратной пропорциональности
- ✓ функции квадратного корня

Выберите описание каждой математической модели.

$y = a$

$y = kx$

$y = kx + b$

$y = x^2$

$y = k/x$

Гипербола

Прямая, параллельная оси O_x

Парабола

Прямая, проходящая через начало координат

Прямая

$y = \frac{9}{x}$

$y = 9{,}5x$

$y = -4x + 8$

$y = -x^2$

$y = x(4 - x)$

$y = -0{,}2x$

$y = \sqrt{x}$

$y = \frac{x}{10}$

$y = 0{,}6x^3 + 2$

$y = 3x - 5$

Линейные функции.

y = kx + b

$y = \sqrt{x}$ $y = -x^2$ $y = x(4 - x)$

$y = 0{,}6x^3 + 2$

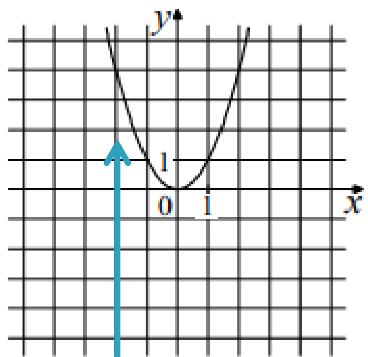
Квадратичные функции.

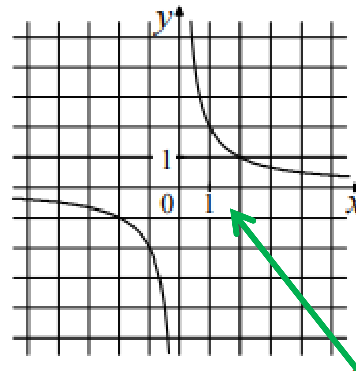
$y = ax^2 + bx + c$

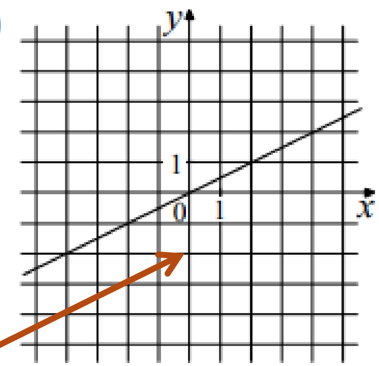
Демонстрационный вариант ОГЭ 2022
Задание 11.

11 Установите соответствие между графиками функций и формулами, которые их задают.

ГРАФИКИ

А)


Б)


В)


ФОРМУЛЫ

1) $y = x^2$ 2) $y = \frac{x}{2}$ 3) $y = \frac{2}{x}$

В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

Ответ:

А	Б	В
1	3	2

Линейная функция — это функция вида **$y = kx + b$**, где x — независимая переменная, k, b — некоторые числа

Графиком линейной функции является **прямая линия**

Для его **построения достаточно двух точек**, координаты которых удовлетворяют уравнению функции.

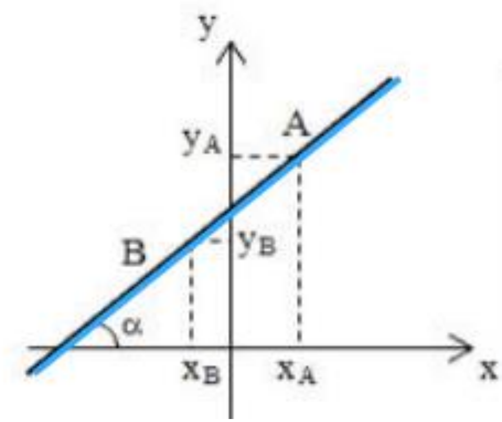
k — угловой коэффициент, отвечает за угол наклона прямой,

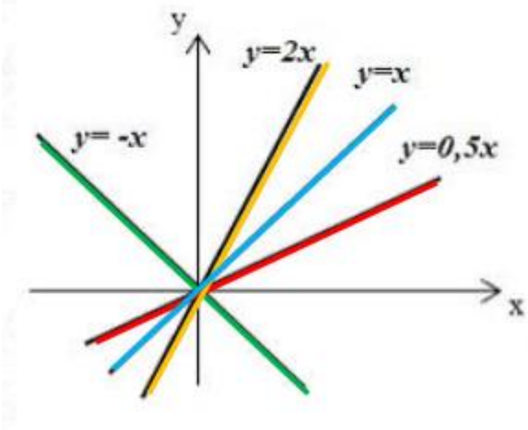
если $k > 0$, то график наклонен вправо

если $k < 0$, то график наклонен влево

$$k = tg\alpha$$

$$\frac{y - y_A}{y_B - y_A} = \frac{x - x_A}{x_B - x_A}$$

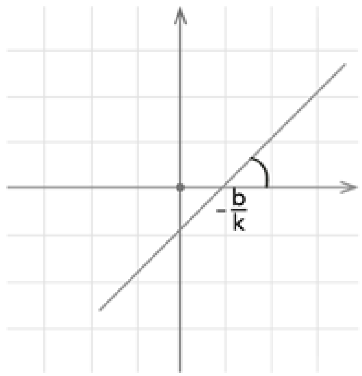
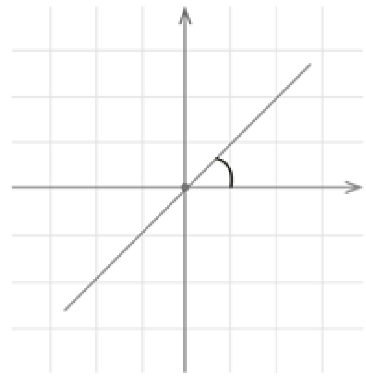
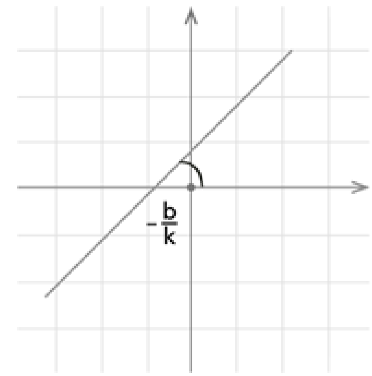
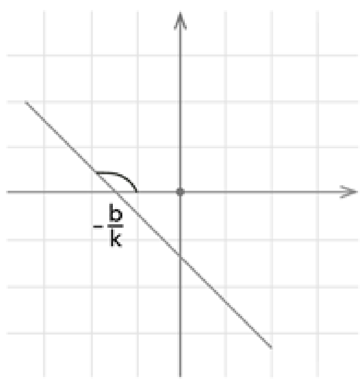
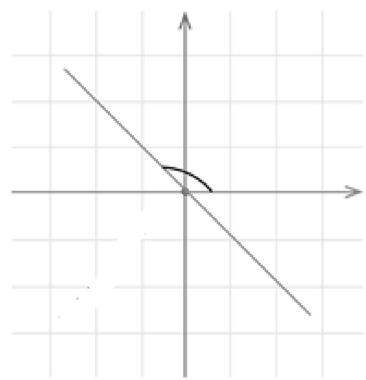
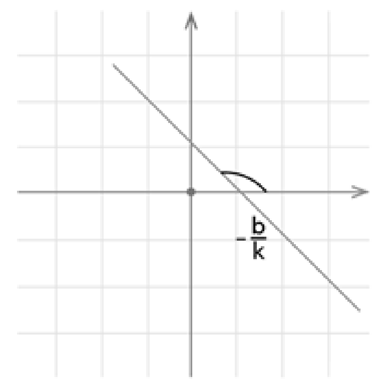




b — свободный коэффициент.

отвечает за точку пересечения графика с осью ординат (за сдвиг графика вдоль оси OY)

Положение прямой на координатной плоскости зависит от значений коэффициентов k и b

	b < 0	b = 0	b > 0
k > 0			
k < 0			

если b > 0, то график функции y = kx + b получается из y = kx со сдвигом на b единиц вверх вдоль оси OY

если b < 0, то график функции y = kx + b получается из y = kx со сдвигом на b единиц вниз вдоль оси OY

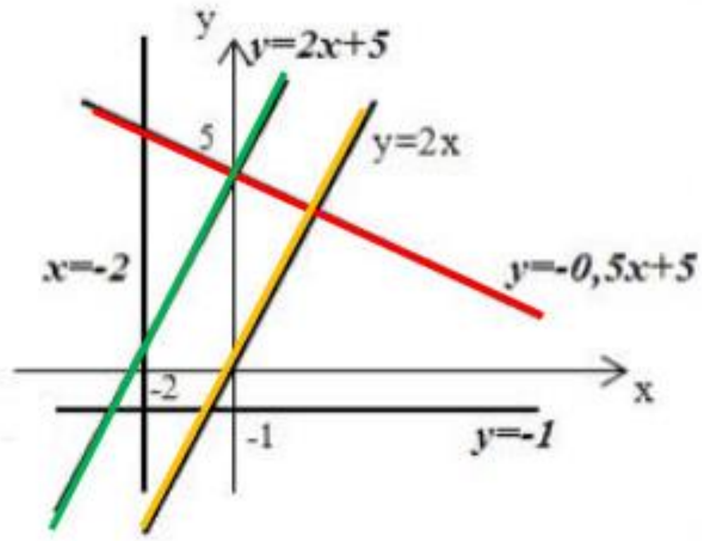
Пусть $y_1 = k_1x + b_1$

и $y_2 = k_2x + b_2$.

Тогда:

$$y_1 \parallel y_2 \Rightarrow k_1 = k_2$$

$$y_1 \perp y_2 \Rightarrow k_1 = -\frac{1}{k_2}$$

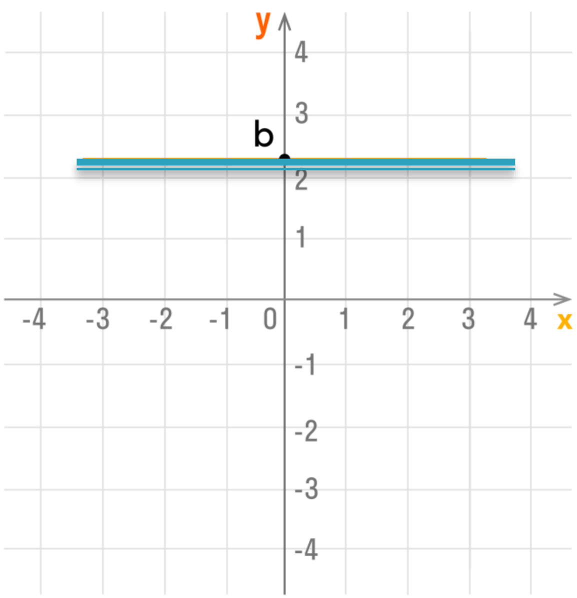


частных случая линейной функции

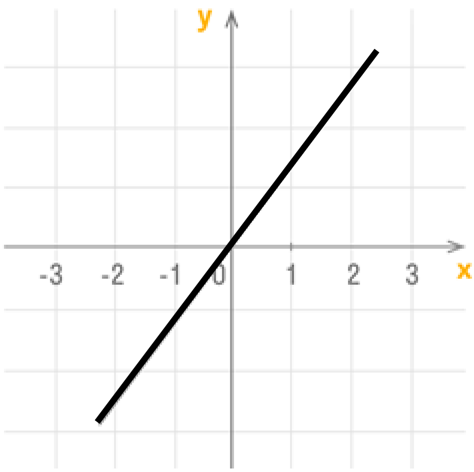
Если $k = 0$, то уравнение примет вид «$y = b$». График — прямая, которая параллельна оси Ox и проходит через точку (0; b).

Если $b = 0$, то уравнение примет вид «$y = kx$». Такая функция называется прямой пропорциональностью. График — прямая, которая проходит через начало координат.

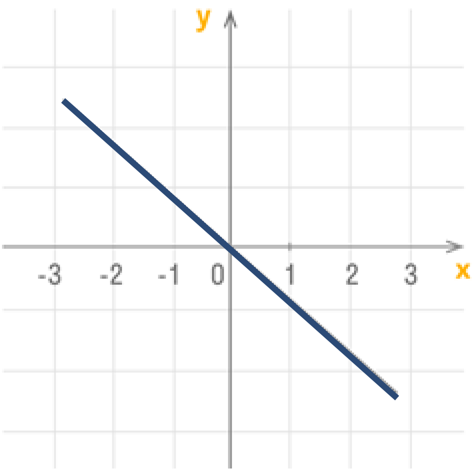
$y = b, k = 0$



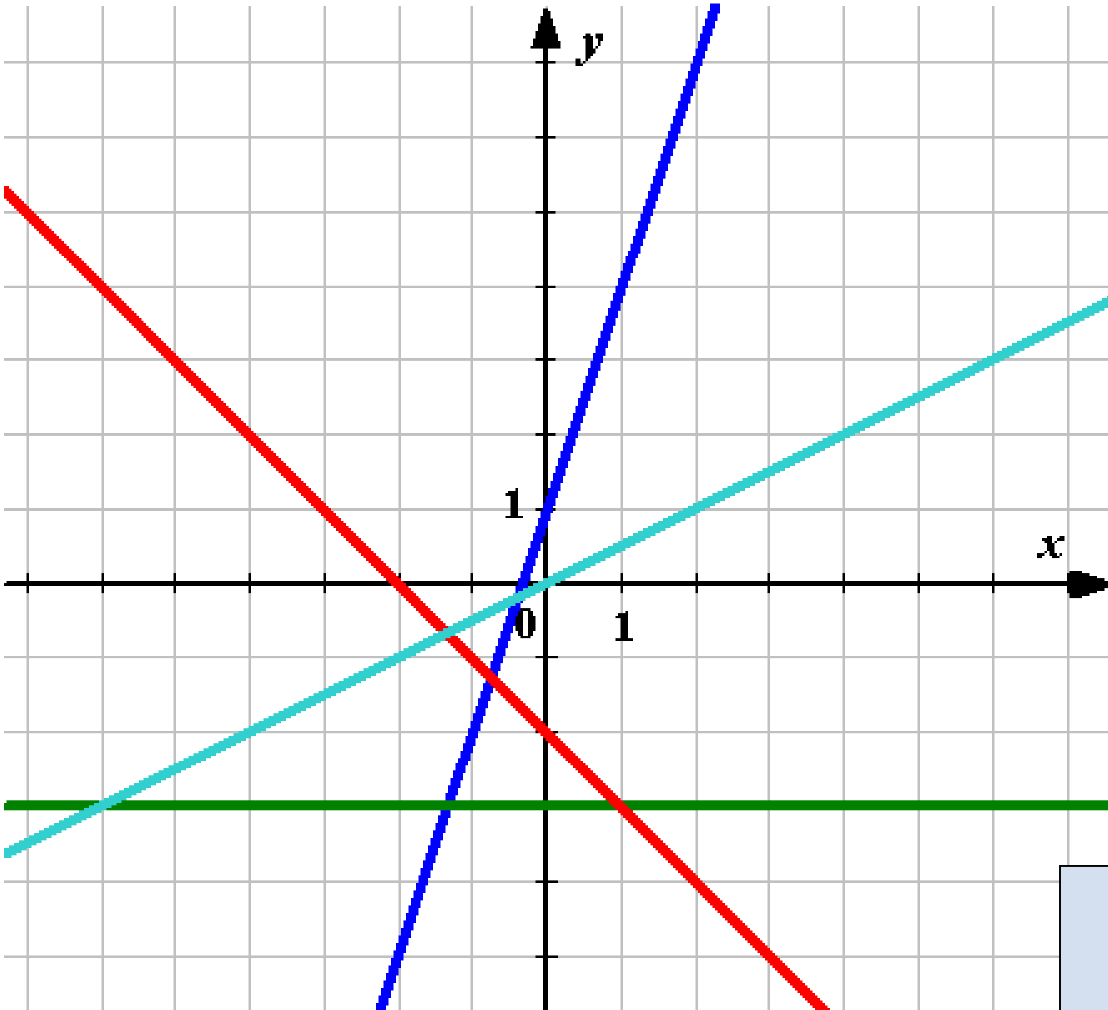
$y = kx, k > 0$



$y = kx, k < 0$



Найдите соответствия:



$y = 0{,}5x$

$y = -x - 2$

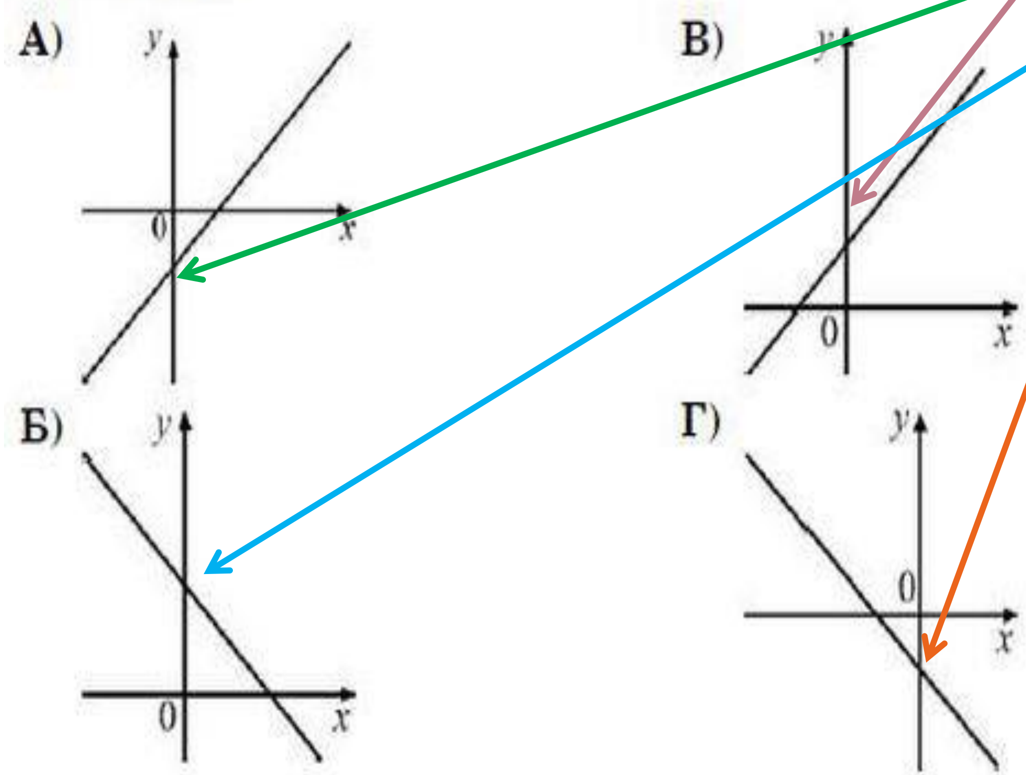
$y = 3x + 1$

$y = -3$

Какой график является графиком функции прямой пропорциональности?

Установите соответствие между графиками функций и значениями коэффициентов

ГРАФИКИ



ЗНАЧЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТОВ

1) $k > 0,\ b > 0$
2) $k > 0,\ b < 0$
3) $k < 0,\ b > 0$
4) $k < 0,\ b < 0$

Ответ:

А	Б	В	Г
2	3	1	4

функция обратной пропорциональности **$y=k/x$, $k\neq 0$,**

Примеры:

$y=\frac{5}{x}$ $k=5$ $y=\frac{1}{4x}$ $k=\frac{1}{4}$

$y=-\frac{7}{x}$ $k=-7$ $y=-\frac{1}{6x}$ $k=-\frac{1}{6}$

график - **гипербола**

1. а) $k>0$ - график лежит в I и III четвертях (рис. 1)

   б) $k<0$ - график лежит во II и IV четвертях (рис. 2, 3)

рис. 1

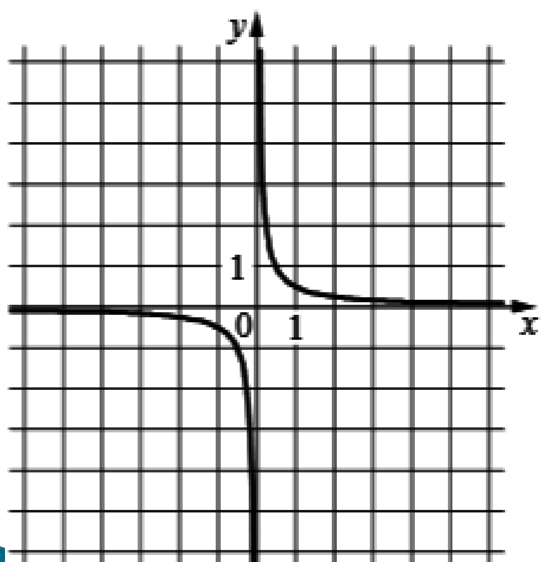


рис. 2

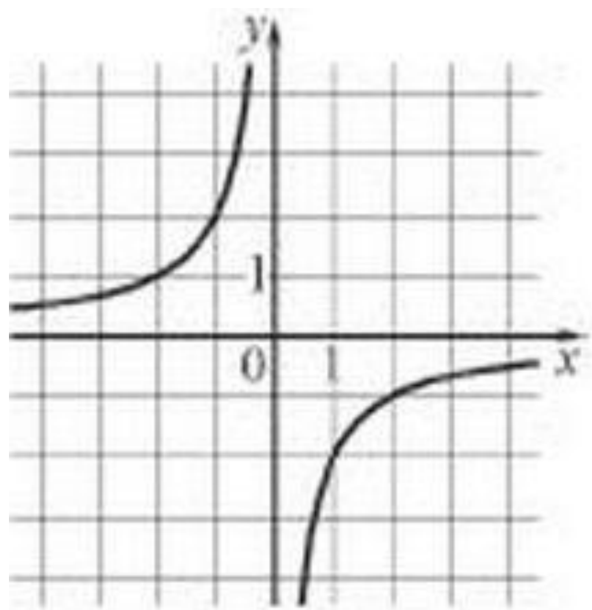
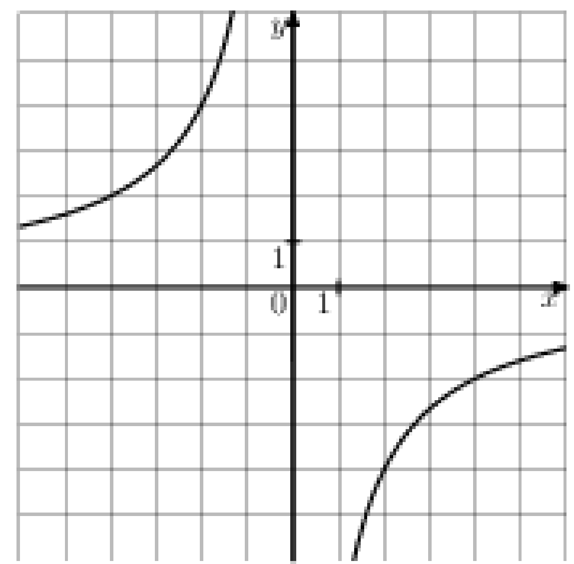


рис. 3



2. а) |k| < 1 – график «сплющен» к осям (рис. 1)

б) |k| > 1 – график отдален от осей (рис. 3)

Чем больше модуль k, тем дальше график от осей

рис. 1

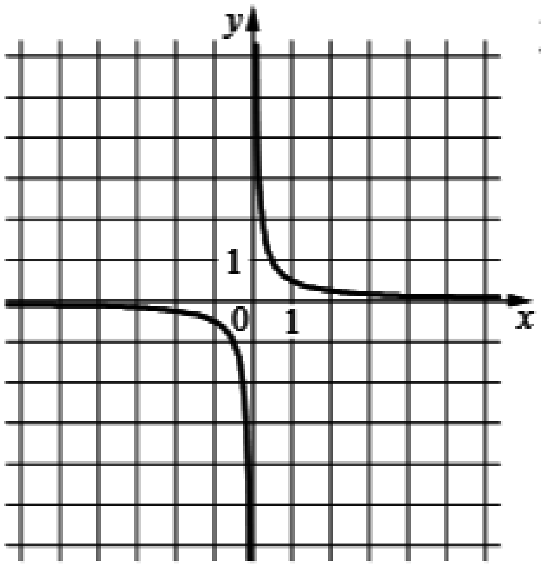


рис. 2

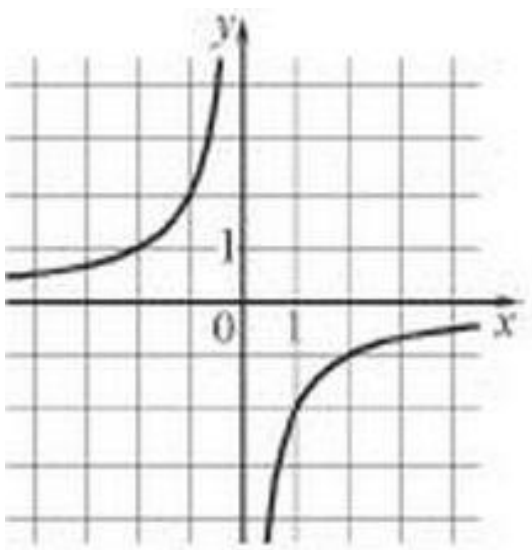
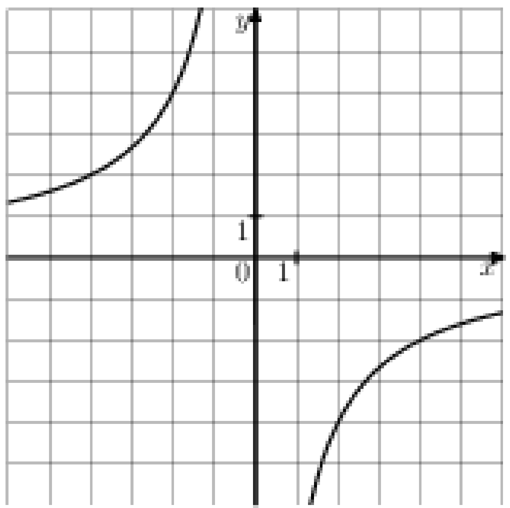


рис. 3



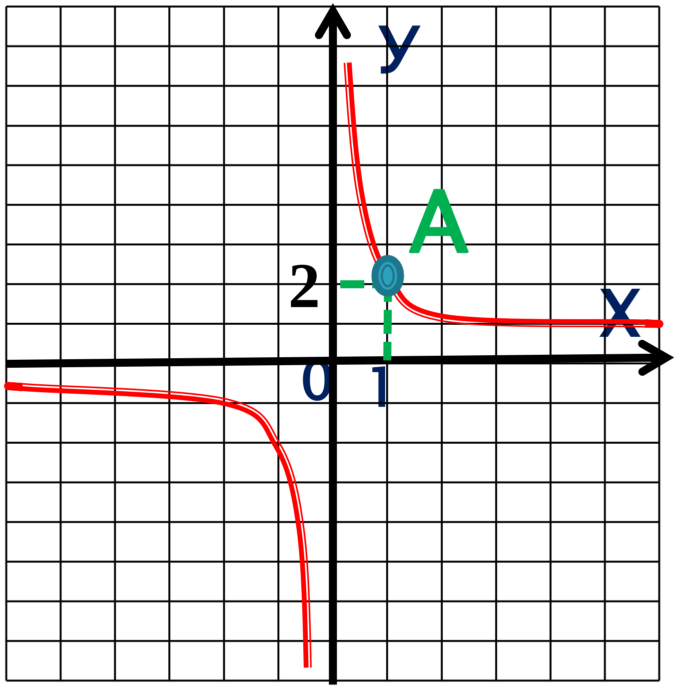


График какой из приведенных ниже функций изображен на рисунке?

1) $y = \frac{1}{2x}$ **2=0,5 неверно**

2) $y = -\frac{2}{x}$

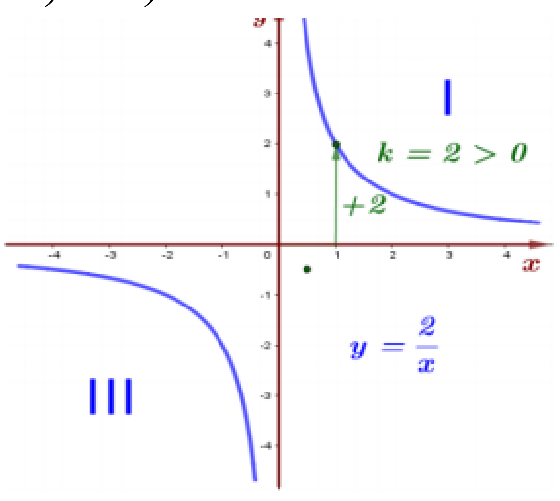
3) $y = \frac{2}{x}$ **2=2 верно**

4) $y = -\frac{1}{2x}$

1. Так как график функции расположен в 1 и 3 четвертях, то ***k*> 0.**
   Исключим варианты 2) и 4).

2. Найдем координаты точки, принадлежащей графику функции, например точка A(1;2). Подставим её координаты в формулы 1) и 3)

Ответ: **3**



квадратичная функция $y = ax^2 + bx + c$,при $a \neq 0$. График- парабола

- Коэффициент а отвечает за направление ветвей параболы:

а) a>0 – ветви параболы направлены вверх (рис. 1)

б) a<0 – ветви параболы направлены вниз (рис. 2)

- Коэффициент с характеризует пересечение графика с осью ОY:

а) c>0 – парабола пересекает ось ОУ в положительной (верхней) части (рис. 1)

б) c<0 - парабола пересекает ось ОУ в отрицательной (нижней) части (рис. 2)

Рис. 1

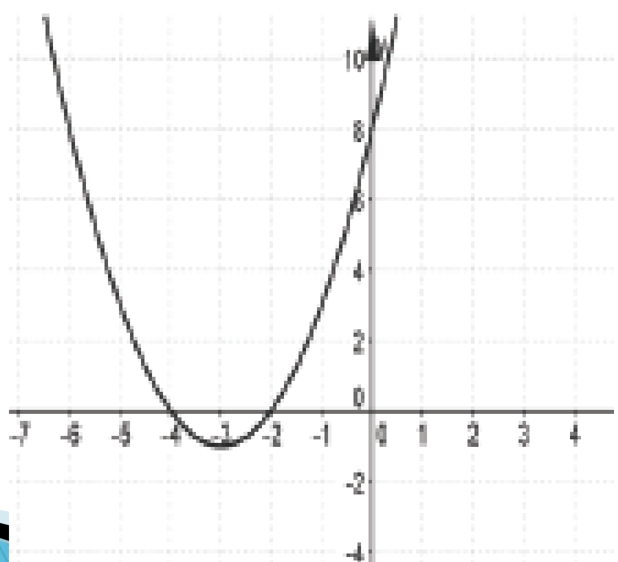
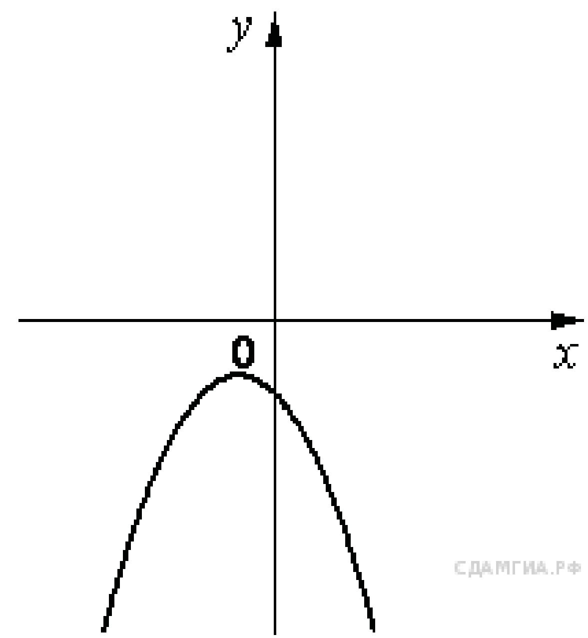


Рис. 2



ЧАСТНЫЕ ВИДЫ

$$y = ax^2 + bx + c$$

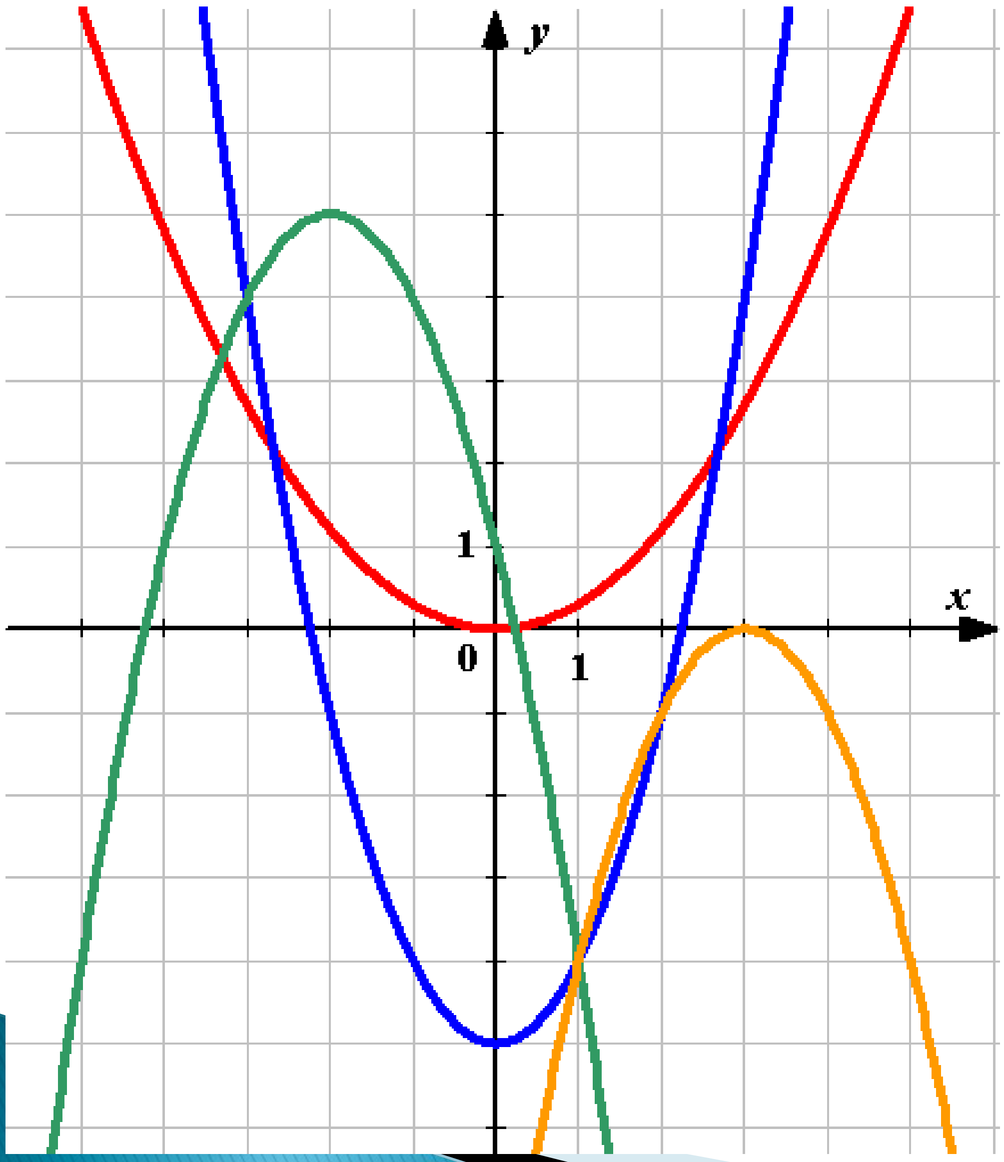
$$y = ax^2$$

$$y = ax^2 + n$$

$$y = a(x-m)^2$$

$$y = a(x-m)^2 + n$$

Найдите соответствия:



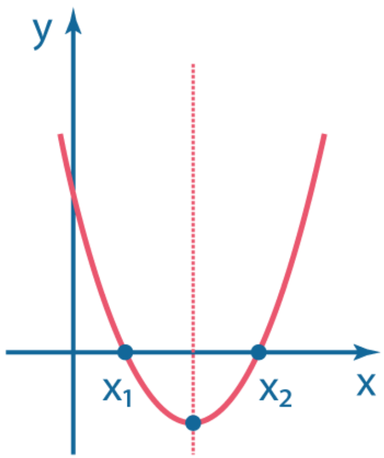
$$y = x^2 - 5$$

$$y = 0{,}3x^2$$

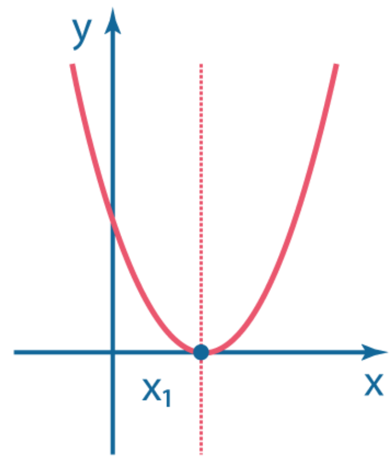
$$y = -(x-3)^2$$

$$y = -(x+2)^2 + 5$$

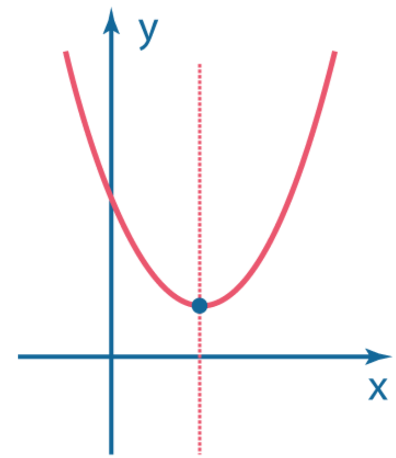
$a > 0, D > 0$



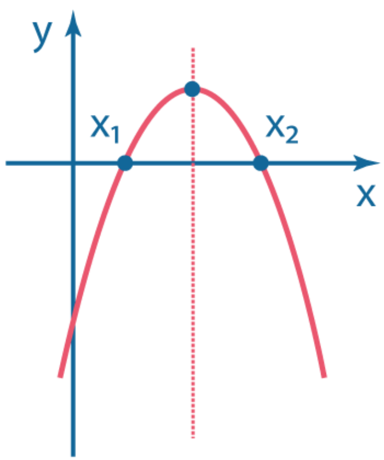
$a > 0, D = 0$



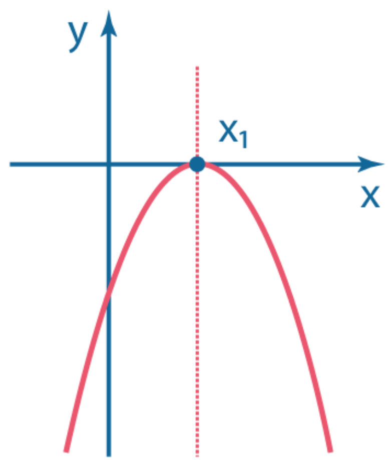
$a > 0, D < 0$



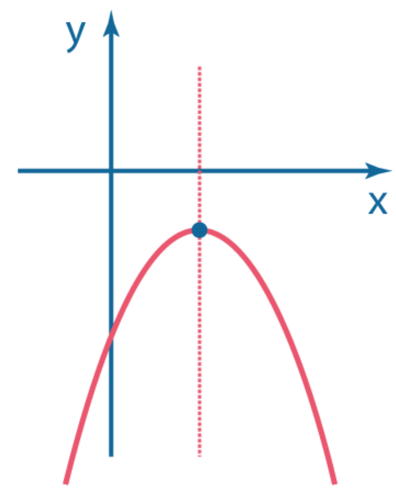
$a < 0, D > 0$



$a < 0, D = 0$



$a < 0, D < 0$

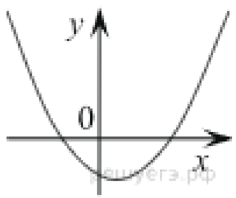


Квадратичная функция

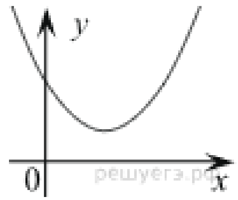
На рисунке изображены графики функций вида $y = ax^2 + bx + c$. Для каждого графика укажите соответствующее ему значения коэффициента a и дискриминанта D.

Графики

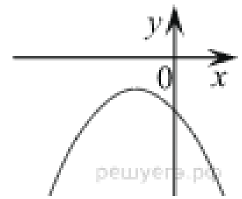
А)



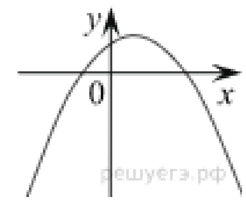
Б)



В)



Г)



Знаки чисел

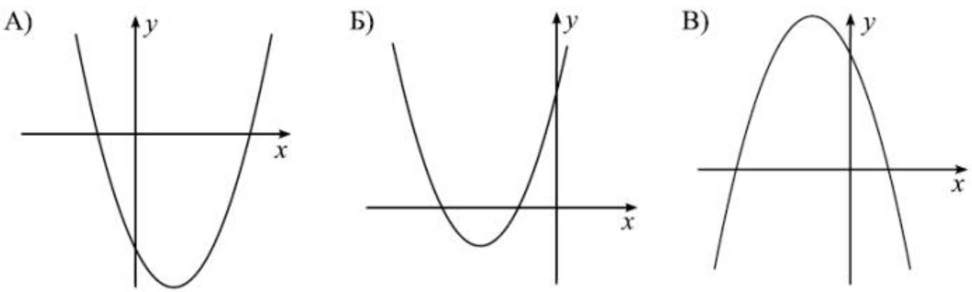
1) $a > 0, D > 0$ 2) $a > 0, D < 0$ 3) $a < 0, D > 0$ 4) $a < 0, D < 0$

Запишите в ответ цифры, расположив их в порядке, соответствующем буквам:

А	Б	В	Г

Установите соответствие между графиками функций и формулами, которые их задают.

ГРАФИКИ



У парабол А) и Б) ветви направлены вверх, а у параболы В) — вниз. Единственной формулой, задающей такую параболу является формула 1, в ней старший коэффициент меньше нуля. Значит, графику В) соответствует формула 1.

У параболы А) корни разных знаков, поэтому их произведение меньше нуля. Следовательно по теореме Виета, свободный член формулы, задающей этот график также меньше нуля. Такой формулой является формула 3. Значит, графику А) соответствует формула 3.

ФОРМУЛЫ

1) $y = -x^2 - 2x + 3$

2) $y = x^2 + 4x + 3$

3) $y = x^2 - 2x - 3$

По направлению ветвей и произведению корней (или сумме корней)

Ответ.

А	Б	В
3	2	1

Нахождение коэффициента а :

1) по графику параболы определяем координаты вершины (m, n);

2) по графику параболы определяем координаты любой точки $A(x_1;y_1)$;

3) подставляем эти значения в формулу квадратичной функции, заданной в другом виде: $y=a(x-m)^2+n$;

4) решаем полученное уравнение.

Нахождение коэффициента b:

1. Сначала находим значение коэффициента a (шаг I, смотри выше).

2. В формулу для абсциссы параболы

$m = -b/2a$ подставляем значения m и a.

3. Находим значение коэффициента b.

Нахождение коэффициента с:

1. Находим ординату **у** точки пересечения параболы с осью Оу, это значение равно коэффициенту **с**, т.е. точка (0;с) - точка пересечения параболы с осью Оу.

2. Если по графику невозможно найти точку пересечения с осью Оу, то выполняем шаги I, II (находим коэффициенты a, b)

3. Подставляем найденные значения a, b , $A(x_1 ; y_1)$ в уравнение $y=ax^2 + bx + c$ и находим **с**.

Найдите значения коэффициентов по графику квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$ изображенному на рисунке.

A(0; 4) $\Rightarrow$ $4 = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c$ $\Rightarrow$ $c = 4$ $\Rightarrow$

Для того, чтобы найти коэффициент c, надо найти ординату точки пересечения графика функции с осью ОУ.

Найдем коэффициент ***a***. Для этого определяем координаты вершины (m; n)

m= 2 n= 2

Определяем координаты любой точки A (0;4)

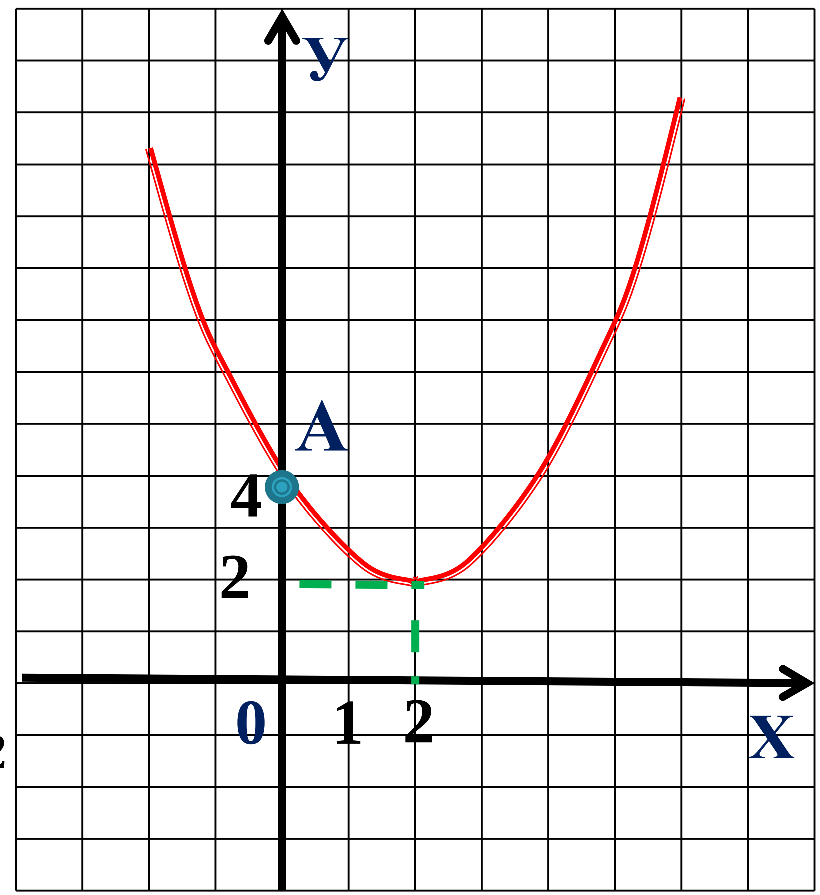
Подставляем эти значения в формулу квадратичной функции, заданной в ином виде: $y = a(x - m)^2 + n$

$4 = a(0 - 2)^2 + 2$ $\Rightarrow$ $4 = 4a + 2$ $\Rightarrow$

$4 - 2 = 4a$ $\Rightarrow$ $a = 0{,}5$

Для нахождения коэффициента b, воспользуемся формулой для нахождения абсциссы вершины параболы

$m = \frac{-b}{2a}$ $\Rightarrow$ $2 = \frac{-b}{2 \cdot 0{,}5}$ $b = -2$



Задание 22 – это задание высокого уровня сложности, оно требует свободного владения материалом и довольно высокого уровня математического развития. Рассчитаны эти задачи на обучающихся, изучавших математику более основательно.

Хотя эти задания не выходят за рамки содержания, предусмотренного стандартом основной школы, но при их выполнении ученик должен продемонстрировать владение некоторыми специальными приемами преобразования выражений, проявить умения исследовательского характера.

Общие подходы
к проверке и оценке выполнения заданий с развернутым ответом

- Решение должно быть математически грамотным и полным, из него должен быть понятен ход рассуждений обучающегося.
- Оформление решения должно обеспечивать выполнение указанных выше требований, а в остальном может быть произвольным.
- Если в решении допущена ошибка непринципиального характера (вычислительная, погрешность в терминологии или символике и др.), не влияющая на правильность общего хода решения (даже при неверном ответе) и позволяющая, несмотря на ее наличие, сделать вывод о владении материалом, то учащемуся засчитывается балл, на 1 меньший указанного

Типичные ошибки при выполнении 22 задания

- неправильно построен график;
- записано верное значение параметра, но не указано, как оно получено;
- отсутствует единичный отрезок на координатных осях или направления координатных осей;
- ошибки в преобразовании выражения, которым задана функция;
- вычислительные ошибки;
-на графике не показана выколотая точка (нужно обозначить в соответствии с ее координатами).

Алгоритм решения задачи № 22

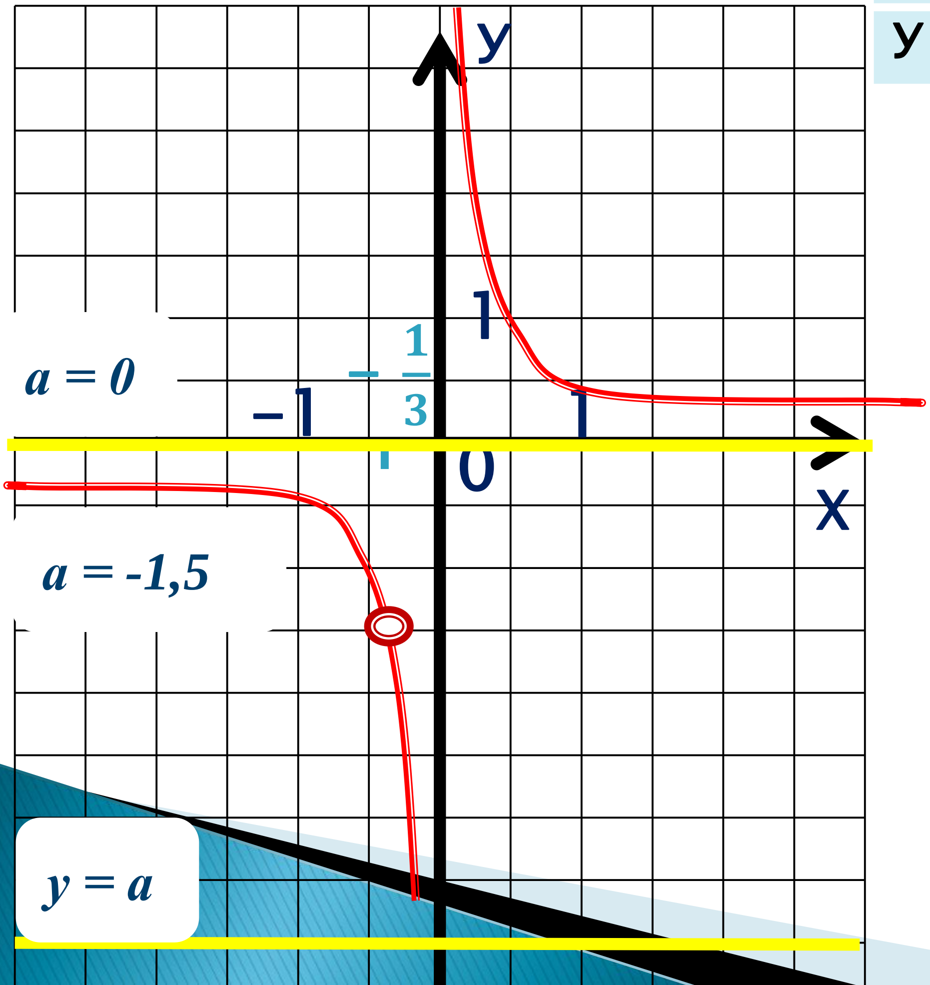
1. Преобразовать выражение, которым задается функция.
2. Рассмотреть ОДЗ.
3. Построить график, с учётом ОДЗ.(учитывая точки разрыва функции)
4. Исследовать график функции, исходя из вопроса к заданию (как правило, найти значение m или k при которых прямые y=m или y= kx не имеют общих точек с графиком данной функции, или имеют с графиком данной функции заданное число общих точек)
5. Записать ответ.

Постройте график функции $y = \frac{3x+1}{6x^2+2x}$ и определите, при каких значениях параметра а прямая у = а не имеет с графиком общих точек.

1. Преобразуем функцию: $y = \frac{3x+1}{6x^2+2x} = \frac{3x+1}{2x(3x+1)} = \frac{1}{2x}$, ОДЗ: $x \neq 0$, $x \neq -\frac{1}{3}$

2. Построим график функции $y = \frac{1}{2x}$

Х	1	0,5	2	−1	−0,5	−2
У	0,5	1	0,25	−0,5	−1	−0,25



Определим, при каких значениях параметра *а* прямая *у* = *а* не имеет с графиком общих точек.

Очевидно, что горизонтальная прямая *y* = *a* не имеет с графиком ни одной общей точки при ***a*** **= 0** и в "исключенной" точке х = $-\frac{1}{3}$.

Найдем соответствующую ординату:

$$y = \frac{1}{2x} = \frac{-3}{2} = -1{,}5 \rightarrow \quad \boldsymbol{a = -1{,}5}$$

Ответ: 0 и – 1,5.

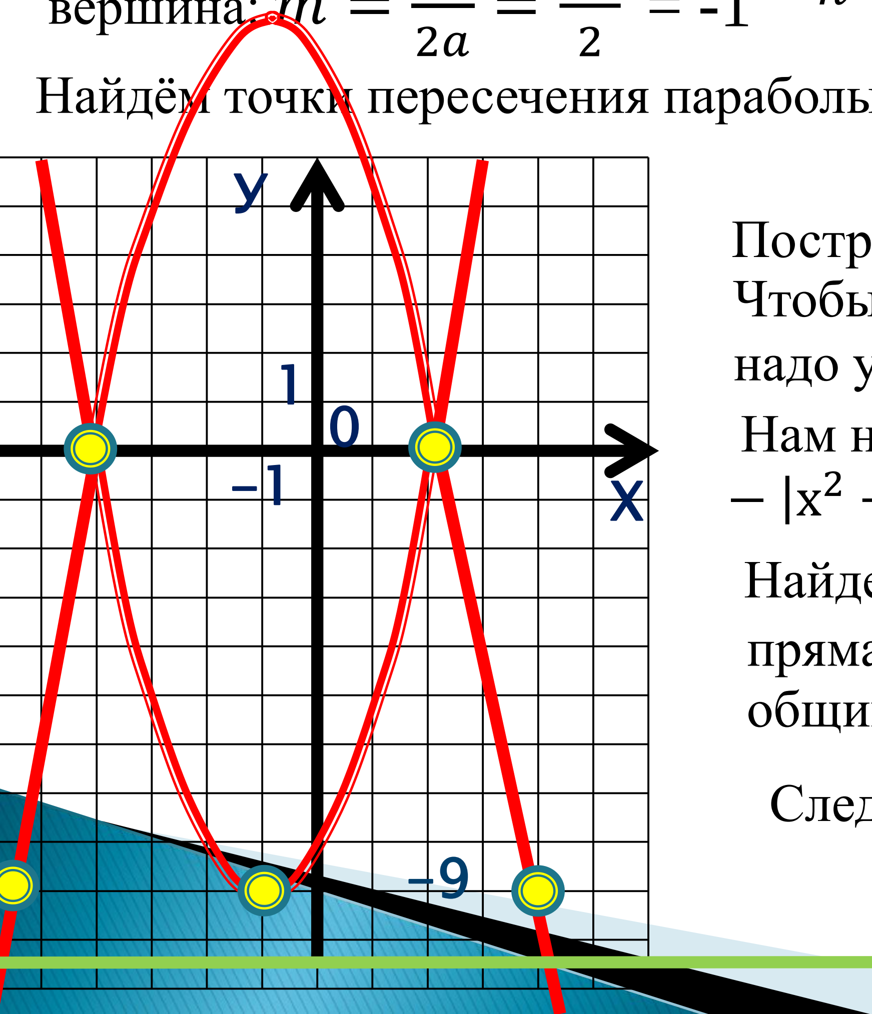
Постройте график функции $y = -|x^2 + 2x - 8|$ и определите, при каких значениях параметра а прямая y=a имеет с графиком три или более общих точек.

Чтобы построить график данной функции, построим график квадратичной функции $y = x^2 + 2x - 8$. График парабола, $a > 0$ ветви вверх,

вершина: $m = \frac{-b}{2a} = \frac{-2}{2} = -1$ $n = (-1)^2 + 2(-1) - 8 = -9$ (−1;−9)

Найдём точки пересечения параболы с осью абсцисс: y=0, $x^2 + 2x - 8 = 0$

D=36, $x_1 = -4$, $x_2 = 2$.



Построим параболу.

Чтобы получить график функции $y = |x^2 + 2x - 8|$ надо учитывать, что для этой функции $y \geq 0$.

Нам нужно построить график функции $y = -|x^2 + 2x - 8|$, следовательно: $y \leq 0$.

Найдем значения параметра *a* , при которых прямая *y=a* имеет с графиком три или более общих точек, используя чертеж.

Следовательно $a \in [-9; 0)$

Ответ: $[-9; 0)$

Постройте график функции $y = \dfrac{x^3+3x^2+16x+48}{x+3}$ ***и определите, при каких значениях параметра k прямая y = kx не имеет с графиком общих точек.***

Преобразуем функцию

$$y = \frac{x^3+3x^2+16x+48}{x+3} = \frac{x^2(x+3)+16(x+3)}{x+3} = \frac{(x+3)(x^2+16)}{x+3} = x^2+16$$

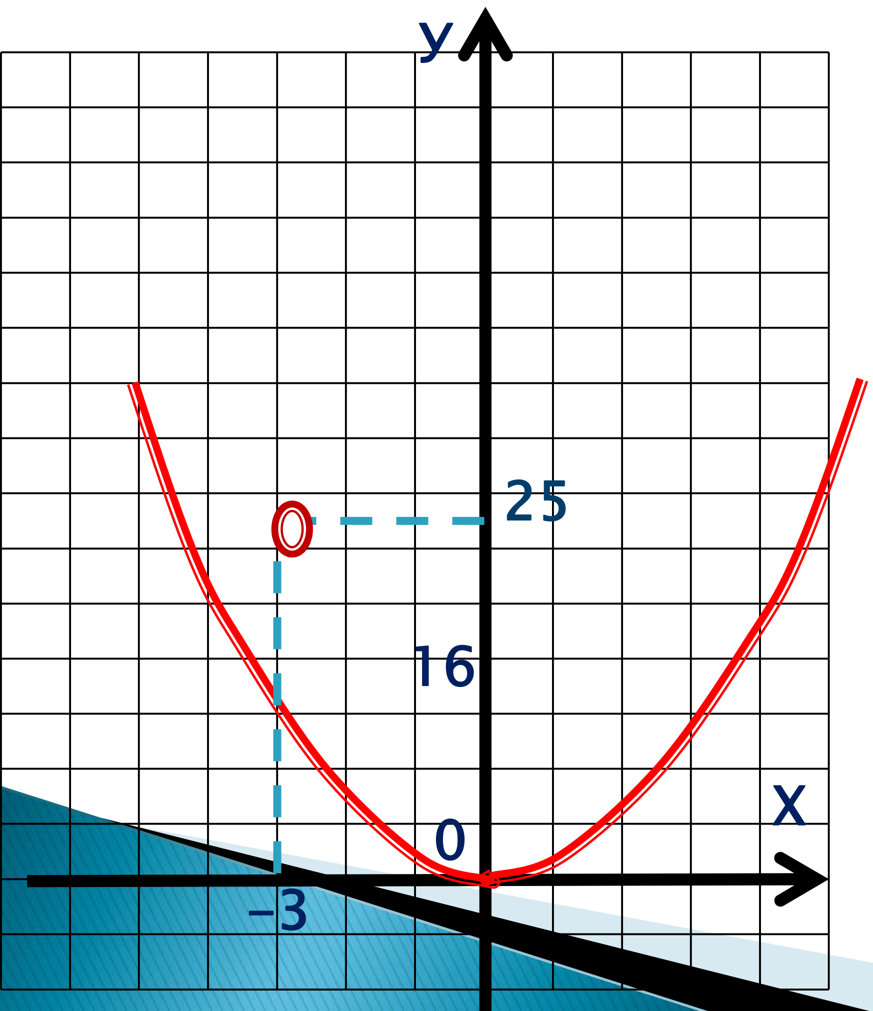
1. Построим график функции $y = x^2+16$, учитывая ОДЗ: $x \neq -3$.

График получим из графика функции $y = x^2$, который сдвинем на 16 ед.отрезков вдоль оси ординат.

2. $x = -3$, найдем соответствующую ординату. $y = x^2+16$, $y = (-3)^2+16$, $y = 25$

Получили точку с координатами (-3;25).

Так как $y=kx$, получаем $25 = -3k$, $k = -\frac{25}{3}$



Очевидно, что прямая $y=kx$ не имеет общих точек с параболой, если:

- графики этих функций не пересекаются (1);
- в точке с абсциссой x= -3 (2).

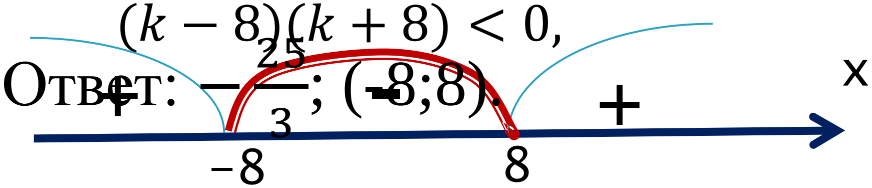
1. Для того, чтобы найти значения параметра k при которых графики функций не пересекаются, рассмотрим систему $\begin{cases} y = kx \\ y = x^2+16 \end{cases}$

решим методом сложения, получим $x^2 - kx + 16 = 0$

Нас интересуют такие значения параметра k, при котором уравнение не имеет корней, т.е. $D< 0$.

$D= k^2 - 4\cdot 16$, $k^2 - 64 < 0$,

$(k-8)(k+8) < 0$,



$k \in (-8; 8)$

Ответ: $-\frac{25}{3}$; $(-8;8)$.

Постройте график функции $y=\dfrac{\left(x^2-x-6\right)\left(x^2-4x-5\right)}{x^2-2x-3}$

и определите, при каких значениях m прямая y = m

имеет с графиком ровно одну общую точку.

Решение.

$$y=\frac{\left(x^2-x-6\right)\left(x^2-4x-5\right)}{x^2-2x-3}$$

$$\frac{\left(x^2-x-6\right)\left(x^2-4x-5\right)}{x^2-2x-3}=\frac{(x-3)(x+2)(x+1)(x-5)}{(x+1)(x-3)}=$$

$$=(x+2)(x-5)=x^2-3x-10=(x-1{,}5)^2-12{,}25.$$

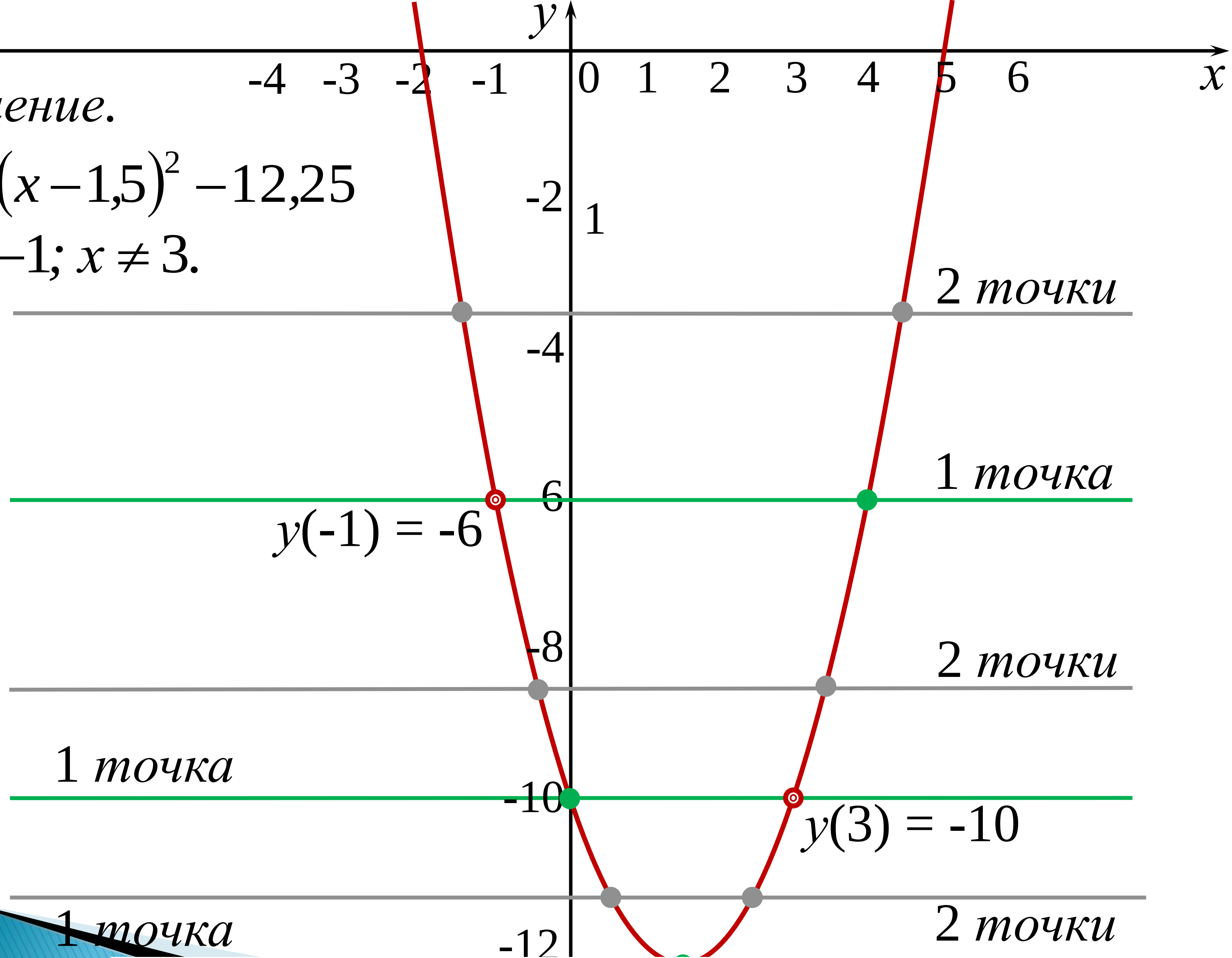
при условии $x+1\neq 0,\ x-3\neq 0 \iff x\neq -1$ *и* $x\neq 3.$

$$D(y)=(-\infty;-1)\cup(-1;3)\cup(3;+\infty).$$

Решение.

$$y = (x - 1{,}5)^2 - 12{,}25$$

$$x \neq -1;\ x \neq 3.$$



Ответ: $m = -12{,}25$; $m = -10$; $m = -6$.